

ENERGIE ET PUISSANCE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

Date : 19 décembre 2022

Licence :

Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage des Conditions Initiales à l'Identique :
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/fr/>

auteur·e(s) : Sébastien Morterolle, INSA de Lyon

Table des matières

Objectifs	3
Introduction	4
1. Puissance	5
1.1. Fonction de force	5
1.2. Puissance développée par une action mécanique dérivant d'une fonction de force	5
1.3. Travail d'une action mécanique dérivant d'une fonction de force	6
1.4. Fonctions de force classiques	6
1.4.1. Fonction de force de pesanteur	6
1.4.2. Fonction de force d'un ressort	7
2. Énergie cinétique	9
2.1. Energie cinétique d'un point matériel	9
2.2. Energie cinétique d'un solide	9
2.3. Energie cinétique d'un système de solides	10
3. Théorème de l'énergie cinétique.....	11
3.1. Théorème appliqué à un solide ou un ensemble de solides	11
3.2. Lien entre le TEC et le PFD	11
3.3. Théorème de l'énergie cinétique en termes de travaux	11
3.4. Intégrale première de l'énergie cinétique	12
4. Appliquer le TEC.....	13
5. Exercices Energétique	14
5.1. Exercice : Cylindre roulant	14
5.2. Exercice : Tribomètre	14
5.3. Exercice : Etude d'un manège	16

Objectifs

Objectif 1 : Connaitre les notions d'énergie et de puissance

Objectif 2 : Etre capable de calculer la puissance développer par une action mécanique

Objectif 3 : Etre capable de calculer l'énergie cinétique d'un solide

Objectif 4 : Etre capable d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique à un système mécanique

Introduction

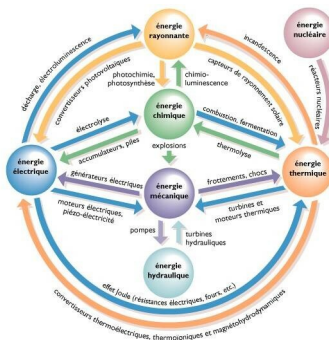
Une puissance est une quantité scalaire qui représente l'énergie par unité de temps fournie par un système à un autre. En mécanique, elle est le produit d'une force par la vitesse de son point d'application. Elle s'exprime généralement en watts W ($\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$).

Une énergie est une grandeur scalaire exprimant la capacité d'un système à modifier l'état d'autres systèmes avec lesquels il entre en interaction (mise en mouvement, production de la lumière, de la chaleur ou de l'électricité). Elle s'exprime en joules J ou en kilowattheure (kW.h).

L'énergie cinétique est l'énergie qu'un système en mouvement peut fournir à un autre du fait même de ce mouvement.

L'énergie potentielle est l'énergie accumulée dans un système de par son état (position, déformation) et qui peut être libérée par un changement d'état. Cette énergie correspond au travail des forces dérivant de fonction de force (pesanteur, ressort...).

Le travail d'une force est l'énergie transmise par cette force lors du déplacement de son point d'application (l'objet subissant la force se déplace ou se déforme). Le travail d'une force est produit de l'intensité d'une force par la projection du déplacement de son point d'application sur la direction de la force.



Transformations énergétiques

1. Puissance

1.1. Fonction de force

S'il existe une fonction $U(x, y, z, t)$ telle que :

Pour une force $\vec{F} = X\vec{x}_g + Y\vec{y}_g + Z\vec{z}_g$ appliquée en un point P défini par $\vec{O}_g\vec{P} = x\vec{x}_g + y\vec{y}_g + z\vec{z}_g$,
$$\begin{cases} X = \frac{\partial U}{\partial x} \\ Y = \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \text{ où } \vec{F} = \vec{\text{grad}}U$$

Alors on peut dire qu'il existe une fonction de force ou que la force \vec{F} dérive d'une fonction de force.

◆ Remarque

Si la fonction ne dépend que des coordonnées $U(x, y, z)$ alors on parle d'une fonction de forces au « *sens strict* ».

Si la fonction ne dépend que des coordonnées et du temps $U(x, y, z, t)$ alors on parle d'une fonction de forces au « *sens large* ».

Une fonction de force U correspond à un potentiel d'énergie $V : U = -V$.

1.2. Puissance développée par une action mécanique dérivant d'une fonction de force

La puissance développée par la force \vec{F} appliquée au point P dérivant de la fonction $U(x, y, z, t)$ est :

$$\begin{aligned} P_{F/g} &= \vec{F} \cdot \vec{V}(\text{P/g}) \\ &= X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

Et la dérivée de la fonction par rapport au temps peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Si U est une fonction de force au sens strict, c'est-à-dire $U(x, y, z)$, alors $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ et $P_{F/g} = \frac{dU}{dt}$

1.3. Travail d'une action mécanique dérivant d'une fonction de force

Le travail fourni par la force \vec{F} appliquée au point P dérivant de la fonction $U(x, y, z, t)$ est :

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dU}{dt} dt = U_{t_1} - U_{t_0}$$

Si U est une fonction de force au sens strict $U(x, y, z)$ alors le travail ne dépend pas du chemin pris pour aller de A vers B mais uniquement des valeurs initiale et finale de la fonction de force :

$$W_{AB} = U_B - U_A$$

1.4. Fonctions de force classiques

1.4.1. Fonction de force de pesanteur

Soit \vec{z}_g l'axe vertical ascendant du repère galiléen, la force de pesanteur est $\vec{F}_{pes \rightarrow S} = -mg\vec{z}_g$ appliquée au centre de masse G défini par $\vec{O}_g\vec{G} = x\vec{x}_g + y\vec{y}_g + z\vec{z}_g$

$$\begin{cases} X = \frac{\partial U_{pes}}{\partial x} = 0 \\ Y = \frac{\partial U_{pes}}{\partial y} = 0 \\ Z = \frac{\partial U_{pes}}{\partial z} = -mg \end{cases}$$

Donc la fonction de force de pesanteur est $U_{pes} = -mgz + cte$ où z est altitude du centre de masse (position suivant la verticale ascendante).

◆ Remarque

La puissance développée par l'action de pesanteur est

$$P_{pes/g} = \vec{F}_{pes \rightarrow S} \cdot \vec{V}(G, S/g) = -mg\dot{z}$$

Si la pesanteur dérive d'une fonction de force alors $P_{pes/g} = \frac{dU_{pes}}{dt}$

Donc la fonction de force de pesanteur est $U_{pes} = -mgz + cte$

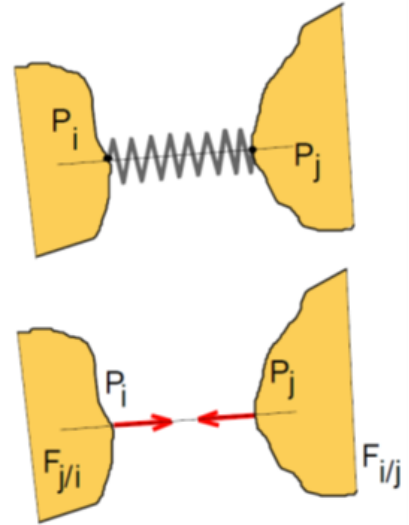
1.4.2. Fonction de force d'un ressort

Ressort de traction/compression

Pour un ressort de traction/compression de raideur k [N/m] et de longueur à vide l_0 ancrer au solide S_i en un point P_i et au solide S_j en P_j , le solide S_i agit sur le solide S_j sous la forme d'un glisseur dont la résultante est :

$$\overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} = -k(l - l_0) \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{F_{j \rightarrow i}}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{P_i P_j}}{\|\overrightarrow{P_i P_j}\|} = \frac{\overrightarrow{P_i P_j}}{l} = \frac{(x-x_{P_i})\overrightarrow{x}_g + (y-y_{P_i})\overrightarrow{y}_g + (z-z_{P_i})\overrightarrow{z}_g}{\sqrt{(x-x_{P_i})^2 + (y-y_{P_i})^2 + (z-z_{P_i})^2}}$$



$$\overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \cdot \overrightarrow{x}_g = -k(l - l_0) \frac{x - x_{P_i}}{l} = -k(l - l_0) \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial U_r}{\partial x}$$

$$\overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \cdot \overrightarrow{y}_g = -k(l - l_0) \frac{y - y_{P_i}}{l} = -k(l - l_0) \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{\partial U_r}{\partial y}$$

$$\overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \cdot \overrightarrow{z}_g = -k(l - l_0) \frac{z - z_{P_i}}{l} = -k(l - l_0) \frac{\partial l}{\partial z} = \frac{\partial U_r}{\partial z}$$

$$\text{Donc } U_r = -\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte$$

$$\begin{aligned} P_{\text{ressort } i \rightarrow j} &= \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \cdot \overrightarrow{V(P_j/g)} = -k(l - l_0) \overrightarrow{u} \cdot \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{O_g P_i} + l \overrightarrow{u} \right)_g \\ &= -k(l - l_0) \overrightarrow{u} \cdot \left(\frac{dl}{dt} \overrightarrow{u} + l \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \Big|_g \right) \quad \text{si } P_i \text{ fixe dans } R_g \\ &= -k(l - l_0) \frac{dl}{dt} \quad \text{car } \overrightarrow{u} \cdot \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \Big|_g = 0 \end{aligned}$$

On sait que $P_{\text{ressort } i \rightarrow j} = \frac{dU_r}{dt}$ d'où $dU_r = -k(l - l_0)dl$ donc $U_r = -\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte$.

Cas où le ressort est intérieur au système isolé

$$\begin{aligned} P_{\text{ressort}} &= \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \cdot \overrightarrow{V(P_j/g)} + \overrightarrow{F_{j \rightarrow i}} \cdot \overrightarrow{V(P_i/g)} = \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \cdot \left(\overrightarrow{V(P_j/g)} - \overrightarrow{V(P_i/g)} \right) \\ &= \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{O_g P_j}}{dt} \Big|_g - \frac{d\overrightarrow{O_g P_i}}{dt} \Big|_g \right) = \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \cdot \frac{d\overrightarrow{P_i P_j}}{dt} \Big|_g = \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \cdot \frac{d(l\overrightarrow{u})}{dt} \Big|_g = -k(l - l_0) \frac{dl}{dt} \end{aligned}$$

On retrouve donc $U_r = -\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte$.

Remarque

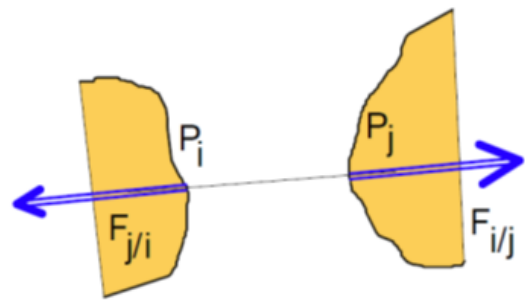
Dans le cas où le ressort est intérieur au système, le principe d'action-réaction implique que la résultante des actions soit nulle $\vec{F}_{i \rightarrow j} + \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}$ mais la puissance intérieure développée par le ressort n'est pas nulle.

Ressort de torsion

Pour un ressort de torsion de raideur k [N/rad] de position angulaire à vide θ_0 , le solide S_i agit sur le solide S_j sous la forme d'un couple dont le moment est :

$$\vec{M}_{i \rightarrow j}(\mathbf{P}_j) = -k(\theta - \theta_0) \vec{u} = -\vec{M}_{j \rightarrow i}(\mathbf{P}_j)$$

où $\vec{u} = \frac{\vec{P}_i \mathbf{P}_j}{l}$ est la direction de l'axe de rotation.



$$\begin{aligned} P_{\text{ressort}} &= \vec{M}_{i \rightarrow j}(\mathbf{P}_j) \cdot \vec{\Omega}_{j/i} \\ &= -k(\theta - \theta_0) \vec{u} \cdot \dot{\theta} \vec{u} \\ &= -k(\theta - \theta_0) \dot{\theta} \\ &= \frac{dU_r}{dt} \end{aligned}$$

On en déduit que $U_r = -\frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2 + cte$

2. Énergie cinétique

2.1. Energie cinétique d'un point matériel

L'énergie cinétique d'un point matériel P de masse dm est la quantité scalaire égale à la moitié du produit de sa masse par le carré de sa vitesse :

$$T_{P/g} = \frac{1}{2} \overrightarrow{V(P/g)}^2 dm$$

La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps correspond à la puissance développée par les forces d'inertie :

$$\frac{dT_{P/g}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{V(P/g)}^2 dm \right) = \frac{1}{2} 2 \frac{d\overrightarrow{V(P/g)}}{dt} \overrightarrow{V(P/g)} dm = \overrightarrow{V(P/g)} \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm$$

2.2. Energie cinétique d'un solide

L'énergie cinétique d'un solide S est la somme des énergies cinétiques de l'ensemble des points matériels P qui le constitue : $T_{S/g} = \frac{1}{2} \int_S \overrightarrow{V(P/g)}^2 dm$

En exprimant la vitesse de ces points en fonction de celle de son centre de masse et d'un autre point :

$$\overrightarrow{V(P/g)} = \overrightarrow{V(G/g)} + \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{GP}$$

$$\text{Et } \overrightarrow{V(P/g)} = \overrightarrow{V(A, S/g)} + \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{AP}$$

On peut se rendre compte que l'énergie cinétique est la moitié du comoment du torseur cinétique avec le torseur cinématique

$$\begin{aligned}
T_{S/g} &= \frac{1}{2} \int_S \overrightarrow{V(P/g)}^2 dm \\
&= \frac{1}{2} \int_S \left(\overrightarrow{V(G/g)} + \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{GP} \right) \cdot \left(\overrightarrow{V(A, S/g)} + \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{AP} \right) dm \\
&= \frac{1}{2} m \overrightarrow{V(G/g)} \cdot \overrightarrow{V(A, S/g)} + \frac{1}{2} \int_S \left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{GP} \right) \cdot \overrightarrow{V(A, S/g)} dm + \frac{1}{2} \int_S \overrightarrow{V(P/g)} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{AP} \right) dm \\
&= \frac{1}{2} m \overrightarrow{V(G/g)} \cdot \overrightarrow{V(A, S/g)} + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{V(A, S/g)} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \right) \int_S \overrightarrow{GP} dm + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \int_S \left(\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V(P/g)} \right) dm \\
&= \frac{1}{2} m \overrightarrow{V(G/g)} \cdot \overrightarrow{V(A, S/g)} + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{V(A, S/g)} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \right) \cdot \vec{0} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \cdot \overrightarrow{\sigma(A, S/g)} \\
&= \frac{1}{2} m \overrightarrow{V(G/g)} \cdot \overrightarrow{V(A, S/g)} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\sigma(A, S/g)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \\
T_{S/g} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overrightarrow{p(S/g)} \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/g)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \\ \overrightarrow{V(A, S/g)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

◆ Remarque

L'énergie cinétique est plus simple à calculer dans les 2 cas suivants :

- Si le point A est fixe dans le mouvement de S/R_g alors $T_{S/g} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \cdot \overrightarrow{I_{A,S}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/g}}$

- Si le point A est le centre d'inertie G alors

$$T_{S/g} = \frac{1}{2} m \overrightarrow{V(G/g)}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \cdot \overrightarrow{I_{G,S}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/g}}$$

2.3. Énergie cinétique d'un système de solides

L'énergie cinétique d'un système de solide est la somme des énergies cinétiques de l'ensemble des solides S_i qui le compose : $T_{\Sigma/g} = \sum_i T_{S_i/g}$

En pratique, on calcule pour chaque solide son énergie cinétique en son centre de masse ou un point fixe puis on fait la somme pour obtenir celle du système.

3. Théorème de l'énergie cinétique

3.1. Théorème appliqué à un solide ou un ensemble de solides

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un système mécanique est égale à la somme de la puissance développée par toutes les actions intérieures au système et de la puissance galiléenne développée par toutes les actions extérieures appliquées sur le système.

$$\frac{dT_{S/g}}{dt} = P_{ext \rightarrow S/g} + P_{int}$$

$T_{S/g}$ énergie cinétique d'un système mécanique S par rapport au référentiel galiléen R_g

$P_{ext \rightarrow S/g}$ puissance galiléenne développée par les actions extérieures appliquées sur le système S

P_{int} puissance développée par les actions intérieures au système

3.2. Lien entre le TEC et le PFD

Le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel s'écrit : $\vec{f}_P dV = \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm$

Si on multiplie par la vitesse du point par rapport au repère galiléen

$$\vec{f}_P dV \overrightarrow{V(P/g)} = \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm \overrightarrow{V(P/g)}$$

puis intègre sur l'ensemble du système $\int_V \vec{f}_P \overrightarrow{V(P/g)} dV = \int_S \overrightarrow{\Gamma(P/g)} \overrightarrow{V(P/g)} dm$

et sépare les actions intérieures et les actions extérieures au système

$$\int_V \vec{f}_{S \rightarrow P} \overrightarrow{V(P/g)} dV + \int_V \vec{f}_{ext \rightarrow P} \overrightarrow{V(P/g)} dV = \int_S \overrightarrow{\Gamma(P/g)} \overrightarrow{V(P/g)} dm$$

alors on retrouve le théorème de l'énergie cinétique :

$$P_{int} + P_{ext \rightarrow S/g} = \frac{dT_{S/g}}{dt}$$

Le théorème de l'énergie cinétique ne fournit donc pas d'équation supplémentaire au principe fondamental de la dynamique mais constitue un autre moyen de les obtenir. Ce théorème est particulièrement utile lorsque l'on étudie un système avec une mobilité.

3.3. Théorème de l'énergie cinétique en termes de travaux

$$\begin{aligned}
\frac{dT_{S/g}}{dt} &= P_{ext \rightarrow S/g} + P_{int} \quad \Rightarrow \quad dT_{S/g} = P_{ext \rightarrow S/g} dt + P_{int} dt \\
&\Rightarrow \quad dT_{S/g} = W_{ext \rightarrow S/g} + W_{int} \\
&\Rightarrow \quad [T_{S/g}]_{t_1}^{t_2} = [W_{ext \rightarrow S/g}]_{t_1}^{t_2} + [W_{int}]_{t_1}^{t_2} \\
&\Rightarrow \quad [T_{S/g}]_{t_1}^{t_2} = [W_{ext \rightarrow S/g}]_{AB} + [W_{int}]_{AB}
\end{aligned}$$

La variation de l'énergie cinétique d'un système matériel pendant un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est égale au travail de toutes les actions mécaniques (intérieures et extérieures) appliquées sur le système sur le chemin AB parcouru.

$$[T_{S/g}]_{t_1}^{t_2} = [W_{ext \rightarrow S/g}]_{t_1}^{t_2} + [W_{int}]_{t_1}^{t_2}$$

ou

$$[T_{S/g}]_{AB} = [W_{ext \rightarrow S/g}]_{AB} + [W_{int}]_{AB}$$

3.4. Intégrale première de l'énergie cinétique

Si l'on considère un système :

- constitué de solides indéformables $P_{cohesion} = 0$
- lié par des liaisons parfaites $P_{liaisons} = 0$
- dont toutes les autres actions dérivent d'une fonction de forces $P_{reste} = \frac{dU/g}{dt}$

alors l'énergie cinétique est égale à la somme U/g des fonctions de force plus une constante :

$$\frac{dT_{S/g}}{dt} = \frac{dU/g}{dt} \quad \Rightarrow \quad T_{S/g} = U/g + cte \text{ soit } T_{S/g} - U/g = cte$$

4. Appliquer le TEC

Calcul de la puissance développée par les actions mécaniques s'exerçant sur un système mécanique

Pour calculer la puissance développée par une action mécanique, on fait le comoment du torseur de l'action par le torseur cinématique du mouvement du solide, sur lequel l'action s'applique, par rapport au référentiel galiléen :

$$P_{ext \rightarrow S/g} = \overrightarrow{R}_{ext \rightarrow S} \cdot \overrightarrow{V}(A, S/g) + \overrightarrow{M}_{ext \rightarrow S}(A) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$$

Les 2 torseurs sont exprimés au même point ; en général celui où l'on connaît le torseur d'action.

Pour une action intérieure, c'est à dire entre de solides du système considéré, on fait le comoment du torseur de l'action du premier solide sur le second par le torseur cinématique du mouvement du second solide par rapport au premier :

$$P_{i \leftrightarrow j} = \overrightarrow{R}_{i \rightarrow j} \cdot \overrightarrow{V}(A, j/i) + \overrightarrow{M}_{i \rightarrow j}(A) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{j/i}$$

Remarque : si une liaison est parfaite alors elle ne développe pas de puissance.

Pour une action dérivant d'une fonction de force U ou d'un potentiel $V = -U$, on peut calculer la puissance dissipée en dérivant la fonction par rapport au temps :

$$P_{F \rightarrow S/g} = \frac{dU}{dt}$$

La fonction de force de pesanteur est $U_{pes} = -mgz + cte$ où z est altitude du centre de masse (position suivant la verticale ascendante).

La fonction de force d'un ressort linéaire est $U_r = -\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte$ où k est la raideur, l la longueur du ressort (fonction des paramètres cinématiques) et l_0 la longueur à vide du ressort.

Calcul de l'énergie cinétique d'un système mécanique

Pour calculer l'énergie cinétique d'un système mécanique, on somme les énergies cinétiques de tous les solides composant le système. Ces énergies cinétiques sont généralement calculés à partir des quantités exprimées au centre de masse car plus simples :

$$T_{S/g} = \frac{1}{2}mV(G/g)^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}_{S/g} \overline{I}_{G,S} \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$$

S'il existe un point fixe dans le mouvement du solide par rapport au référentiel galiléen, on peut aussi utiliser les quantités exprimées en ce point :

$$T_{S/g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}_{S/g} \overline{I}_{A,S} \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$$

Application du théorème de l'énergie cinétique

Pour appliquer le théorème de l'énergie cinétique, on calcule d'une part l'énergie cinétique du système considéré puis on la dérive par rapport au temps et d'autre part la somme des puissances développées par les actions mécaniques s'exerçant sur le système et à l'intérieur du système. Le théorème dit que ces 2 quantités sont égales, on obtient ainsi une relation entre le mouvement (paramètres cinématiques) et les actions mécaniques.

$$\frac{dT_{S/g}}{dt} = P_{ext \rightarrow S/g} + P_{int}$$

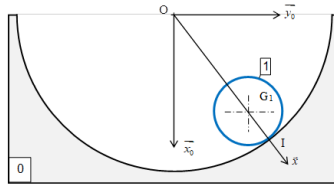
5. Exercices Energétique

5.1. Exercice : Cylindre roulant

Un cylindre S_1 de révolution, plein homogène de rayon r et de masse m , peut rouler sans glisser dans un cylindre S_0 , creux de rayon R . Les axes des deux cylindres sont horizontaux et parallèles.

Le mouvement de S_1/S_0 est défini par :

- $\phi = (\vec{x}_0, \vec{x})$ paramétrant l'orientation du vecteur $\overrightarrow{OG_1}$ par rapport à \vec{x}_0 ;
- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ paramétrant la rotation propre de S_1 par rapport à S_0 .



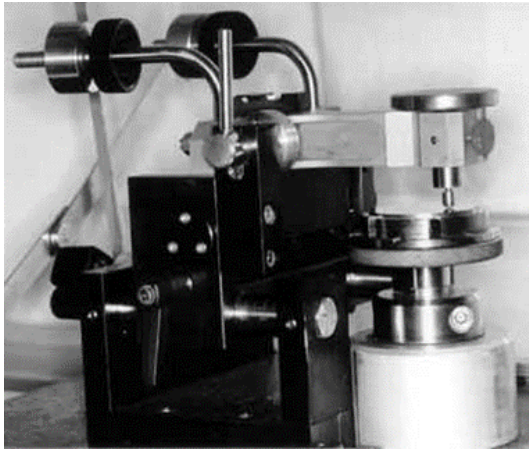
Question

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au solide 1.

Indice :

Application TEC (cf. p.13)

5.2. Exercice : Tribomètre



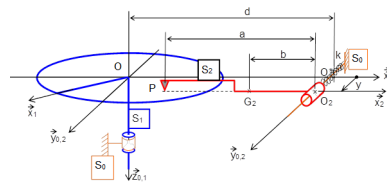
Un tribomètre est appareil permettant de mesurer le coefficient de frottement entre deux solides. On peut parfois visualiser ce qui se passe à « l'intérieur » du contact.

Ici, l'étude se fera sur un tribomètre pion – disque (exemple sur photo ci-contre). Grâce à la mesure du déplacement du bras (S_2 sur le schéma) lorsque le disque tourne à vitesse constante, on peut connaître le coefficient de frottement de glissement (f) entre le pion (P_2) et le disque (S_1 sur le schéma).

Le système est constitué d'un bâti S_0 , référentiel galiléen avec \vec{z}_0 la verticale descendante, et de 2 solides :

- S_1 , Disque + arbre, en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_{0,1})$ avec S_0 et paramétrée $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
- S_2 , Pion + bras, en liaison pivot glissant d'axe $(O^*, \vec{y}_{0,2})$ avec S_0 , de paramètre de rotation $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ et de translation $y = \overrightarrow{O^*O_2} \cdot \vec{y}_0$.

Le contact ponctuel entre S_1 et S_2 se fait au point P du plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ avec $\overrightarrow{O_2P} = -a \vec{x}_2$. Cette liaison n'est pas parfaite car on y considère du frottement.



Un ressort de raideur k est monté entre S_2 et S_0 de sorte que son action soit nulle pour $y = 0$.

Un couple moteur (Cm) s'exerce sur l'arbre du solide S_1 pour maintenir la vitesse de rotation de S_1 par rapport à S_0 constante ($\dot{\psi} = \omega = Cste$).

Données inertielles du solide S_1 : masse m_1 , centre d'inertie $G_1 \in (O, \vec{z}_{1,0})$, moment d'inertie C_1 par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_{1,0})$.

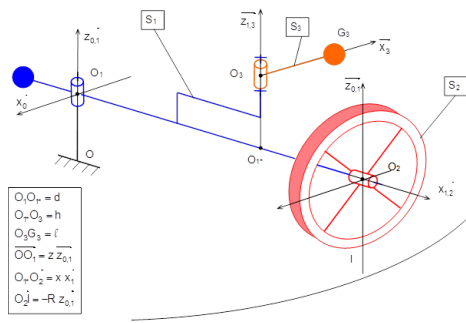
Données inertielles du solide S_2 : masse m_2 , centre d'inertie G_2 avec $\overrightarrow{O_2G_2} = -b \vec{x}_2$, moment d'inertie A_2 par rapport à $(G_2, \vec{y}_{0,2})$.

Question

Pour un fonctionnement en régime stationnaire $\dot{\psi} = \omega = cte$ et $y = y^* = cte$, déterminer le coefficient de frottement f en fonction de y^* , et le couple moteur nécessaire (Cm) :

1. par les théorèmes généraux,
2. par le théorème de l'énergie cinétique.

5.3. Exercice : Etude d'un manège



Le système, schématisé sur la figure, est constitué :

- d'un bâti S_0 , auquel est lié un repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ galiléen où \vec{z}_0 est vertical ascendant.
- d'un solide S_1 en liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{z}_{0,1})$ avec S_0 , paramétrée $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ et $z = \overrightarrow{OO_1} \cdot \vec{z}_{0,1}$
- d'une roue S_2 en liaison pivot glissant d'axe $(O_1, \vec{x}_{1,2})$ avec S_1 , paramétrée $\phi = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ et $x = \overrightarrow{O_1O_2} \cdot \vec{x}_1$
- d'une nacelle S_3 en liaison pivot d'axe $(O_3, \vec{z}_{1,3})$ avec S_1 , paramétrée $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$

Un moteur, monté entre S_0 et S_1 , exerce sur S_1 un couple $C_m \vec{z}_{0,1}$.

Un second moteur, monté entre S_1 et S_3 , exerce sur S_3 un couple $C'_m \vec{z}_{0,1,3}$.

Un ressort de traction-compression, de raideur k et dont l'action s'annule avec x , est placé entre S_1 et S_2 .

La roue S_2 de rayon R est en contact en I avec le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ et est munie d'un pneumatique de paramètre de dérive D (constante donnée).

La liaison S_0/S_2 est caractérisée :

- du point de vue cinématique, par un non glissement longitudinal : $\overrightarrow{V(I, 2/0)} \cdot \vec{y}_1 = 0$
- du point de vue dynamique par son torseur :

$$\{F_{0 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 2}} = -D \delta \vec{x}_1 + Y_{02} \vec{y}_1 + Z_{02} \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{M_{0 \rightarrow 2}(I)} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

où la composante transversale de l'action de contact est rattachée à la dérive du pneumatique avec D la rigidité de dérive et δ l'angle de dérive, qui est l'angle que fait la vitesse du point géométrique de contact I dans son mouvement par rapport à S_0 avec l'intersection du plan de la

roue $(O_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et du plan $(I, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ tangent à la roue en I : $\delta = \arctan \frac{V(I/0) \cdot \vec{x}_1}{V(I/0) \cdot \vec{y}_1}$

Données inertielles

- Solide S_1 : masse m_1 , centre d'inertie O_1 , tenseur d'inertie $\overline{\overline{I_{O_1,1}}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_1$
- Solide S_2 : masse m_2 , centre d'inertie O_2 , tenseur d'inertie $\overline{\overline{I_{O_2,2}}} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}_2$
- Solide S_3 : masse ponctuelle m_3 en G_3

Par ailleurs, on donne sous forme intrinsèque l'accélération du point G_3 dans son mouvement par rapport à S_0 : $\overrightarrow{\Gamma(G_3/0)} = -d\dot{\psi}^2 \vec{x}_1 + d\ddot{\psi} \vec{y}_1 - l(\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \vec{x}_3 + l(\ddot{\theta} + \ddot{\psi}) \vec{y}_3$

Question 1

Ecrire les équations de liaison traduisant en l : le contact et le non glissement longitudinal.

Question 2

Effectuer la mise équations permettant d'obtenir les équations de mouvement.

Etude de l'état stationnaire

Défini par :

$$x = cte = x^* \quad \dot{\psi} = cte = \omega \quad \dot{\phi} = cte = \Omega \quad \dot{\theta} = cte = \dot{\theta}^*$$

Question 3

Trouver les couples moteurs et x^* pour cet état stationnaire.

Question 4

On propose de donner la condition de stabilité des petits mouvements axiaux de la roue au voisinage de l'état stationnaire. On fait l'hypothèse que $\dot{\psi} = cte = \omega$ et on pose : $x = x^* + \bar{x}$ avec \bar{x} ainsi que $\dot{\bar{x}}$ et $\ddot{\bar{x}}$ petits.

- Ecrire l'équation linéarisée caractérisant les petits mouvements axiaux de la roue.
- Traduire la condition de stabilité qui, dans le cas d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, est que tous les coefficients soient du même signe.

Question 5

Déterminer les actions de la liaison L_{1-3} à l'état stationnaire.

Application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble

Question 6

- Calculer la puissance galiléenne développée par toutes les actions mécaniques.
- Calculer l'énergie cinétique galiléenne.
- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'état stationnaire.