

# DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

**Date :** 19 décembre 2022

**Licence :**

Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage des Conditions Initiales à l'Identique :  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/fr/>

**auteur•e(s) :** Sébastien Morterolle, INSA de Lyon

# Table des matières

Objectifs .....	4
1. Introduction du principe fondamental de la dynamique.....	5
2. Masse et centre de masse.....	7
2.1. Masse d'un solide	7
2.2. Centre de masse ou d'inertie d'un solide	7
2.3. Centre de masse et centre de gravité	8
2.4. Position du centre de masse	8
3. Torseur cinétique ou des quantités de mouvement.....	11
3.1. Quantité de mouvement et résultante cinétique	11
3.2. Moment cinétique	11
4. Tenseur d'inertie.....	13
4.1. Opérateur d'inertie	13
4.2. Interprétation des éléments du tenseur d'inertie	14
4.3. Relation entre les moments d'inertie	15
4.4. Forme du tenseur d'inertie pour des solides ayant des symétries	16
4.4.1. Tenseur d'inertie d'un solide ayant un plan de symétrie	16
4.4.2. Tenseur d'inertie d'un solide de révolution	16
4.5. Exemples de tenseurs d'inertie pour des solides homogènes	17
4.6. Moment d'inertie par rapport à un axe connaissant le tenseur en un point de l'axe	20
4.7. Produit d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux connaissant le tenseur d'inertie	22
4.8. Transport du tenseur d'inertie	22
4.9. Changement de repère de la matrice d'inertie	24
4.10. Repère principal d'inertie	25
5. Torseur dynamique ou des quantités d'accélération.....	26
5.1. Quantité d'accélération et résultante dynamique	26
5.2. Moment dynamique	26
5.3. Cas d'un ensemble de solides mobiles entre eux	28
5.4. Exemple d'un pendule	28
6. Lois de comportement.....	30
6.1. Théorie de la gravitation universelle	30
6.2. Pesanteur terrestre	30
6.3. Ressorts	31
6.3.1. Ressort de traction/compression	32
6.3.2. Ressort de torsion	32
6.4. Amortisseurs	32
6.4.1. Amortisseur de translation	33
6.4.2. Amortisseur de rotation	33

6.5. Actions de contact	33
6.5.1. Loi de Coulomb (frottement sec)	34
6.5.2. Résistance au roulement	36
6.5.3. Résistance au pivotement	36
6.6. Loi de dérive d'un pneumatique	37
6.7. Loi de comportement aérodynamique	38
7. Appliquer le PFD – Utilisation de la méthode du système minimum.....	39
8. Exercices de dynamique .....	43
8.1. Exercice : Equilibrage	43
8.2. Exercice : Analyse du fonctionnement de l'équilibreuse	44
8.3. Exercice : Oscillation d'un cylindre sur un chemin circulaire	45
8.4. Exercice : Pendule d'Euler	45
8.5. Exercice : Etude d'un tribomètre	47
8.6. Exercice : Stabilisateur gyroscopique	49

# Objectifs

---

Objectif 1 : être capable de calculer les quantités cinétiques associées à un système mécanique dans un mouvement

Objectif 2 : être capable de calculer les quantités dynamiques associées à un système mécanique dans un mouvement

Objectif 3 : être capable d'écrire les équations régissant le mouvement d'un système en appliquant le principe fondamental de la dynamique

Objectif 4 : Connaître les lois de comportements les plus couramment utilisées

# Introduction du principe fondamental de la 1. dynamique

---

La dynamique exprime les relations qui existent entre les mouvements, décrits par la cinématique, et leurs causes plus ou moins apparentes : les actions mécaniques. Ces relations ont été établies à partir de postulats vérifiés par des expériences. Cette théorie est appelée mécanique rationnelle pour en marquer le caractère déductif.

On observe que pour mettre en mouvement un solide (c'est-à-dire l'accélérer) ou l'arrêter (le ralentir), la somme des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide doit être égale à la variation de quantité de mouvement par rapport au temps. La quantité de mouvement est le produit d'une masse et de la vitesse de cette masse par rapport au référentiel galiléen.

Dans l'étude des machines terrestres, on considère généralement les effets dynamiques liés à la rotation de la Terre négligeables par rapport aux autres actions. Tout repère lié à la Terre est alors supposé galiléen.

Lorsque les effets dus à la rotation de la Terre ne peuvent plus être négligés (systèmes de guidage par inertie, la météorologie...), on utilise comme repère galiléen un repère au centre de la Terre avec les axes pointés vers des étoiles.

Lorsque le déplacement de la Terre autour du Soleil doit être pris en compte (ex. lancement de satellite), on choisit comme repère galiléen un repère au centre du Soleil avec les axes pointés vers des étoiles.

## Le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel

Soit un point matériel P de masse  $m_P$  se déplaçant à une vitesse  $\overrightarrow{V(P/g)}$  par rapport à un référentiel galiléen  $R_g$  et soumis à un ensemble de forces dont la résultante est  $\overrightarrow{R_{ext \rightarrow P}}$ .

Le principe fondamental de la dynamique nous dit que la résultante des actions s'exerçant sur le point matériel est égale à la variation par rapport au temps de la quantité de mouvement

$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{V(P/g)} m_P$  du point matériel :

$$\overrightarrow{R_{ext \rightarrow P}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{p} \Leftrightarrow \overrightarrow{R_{ext \rightarrow P}} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{V(P/g)} m_P) \Leftrightarrow \overrightarrow{R_{ext \rightarrow P}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{V(P/g)} m_P + \overrightarrow{V(P/g)} \frac{d}{dt} m_P$$

Dans le cas où la masse est constante par rapport au temps, on a :

$$\overrightarrow{R_{ext \rightarrow P}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{V(P/g)} m_P \Rightarrow \overrightarrow{R_{ext \rightarrow P}} = m_P \overrightarrow{A(P/g)}$$

Remarque : on peut aussi dire que la somme des actions mécaniques s'exerçant sur un solide est nulle et que parmi ces actions il y a des forces d'inertie qui s'oppose à la mise en mouvement :

$$\overrightarrow{R_{ext \rightarrow P}} - m_P \overrightarrow{A(P/g)} = \overrightarrow{0}$$

## Le principe fondamental de la dynamique pour un solide

Pour un solide, il faut sommer l'ensemble des points matériels qui le compose. Cela se traduit par un torseur  $\{T_{ext \rightarrow S}\}$  équivalent à l'ensemble des actions mécaniques qui doit être égal à torseur  $\{D_{S/g}\}$  équivalent à l'ensemble des variations de quantité de mouvement par rapport au temps et à un référentiel galiléen :

$$\{T_{ext \rightarrow S}\} = \{D_{S/g}\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{ext \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{ext \rightarrow S}(A)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{D(S/g)} \\ \overrightarrow{\delta(A, S/g)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \overrightarrow{F_{i \rightarrow S}} = \int_S \overrightarrow{A(P/g)} dm \\ \sum_i \overrightarrow{M_{i \rightarrow S}(A)} = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{A(P/g)} dm \end{array} \right.$$

## 2. Masse et centre de masse

### 2.1. Masse d'un solide

La masse est une grandeur exprimant la quantité de matière d'un corps. L'unité de masse du système international est le kilogramme (kg). Un kilogramme correspond à la masse d'un prototype en platine iridié conservé au Bureau international des poids et mesures. Le gramme est introduit par la loi du 7 avril 1795 où il est défini comme « la masse d'un volume d'eau pure égal au cube de la centième partie du mètre, et à la température de la glace fondante » (4°C), faisant du kilogramme l'égal de la masse d'un litre d'eau.

La masse d'un solide  $S$  constitué de l'ensemble des points matériels  $P$ , portion de l'espace pouvant être considérée comme ponctuelle et pourvue d'une masse infinitésimale  $dm$ , est l'intégrale de  $dm$  sur le domaine défini par le solide :  $m_S = \int_S dm$

Si le solide est homogène, c'est-à-dire de masse volumique  $\rho$  constante sur l'ensemble du volume du solide  $S$ , alors la masse est égale à la masse volumique multipliée par l'intégrale volumique  $m_S = \rho \int_S dv$  (en coordonnées cartésiennes  $m_S = \rho \int \int \int_S dx dy dz$ ).

### 2.2. Centre de masse ou d'inertie d'un solide

Le centre de masse  $G$  d'un solide est le barycentre des points  $P$  du solide pondéré par leur masse :

$$\int_S \overrightarrow{GP} dm = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \int_S \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP} dm = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad m_S \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} dm \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\int_S \overrightarrow{OP} dm}{m_S}$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes où la position des points est  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$

alors les coordonnées du centre de masse  $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}_R$  sont  $x_G = \frac{1}{m_S} \int_S x dm$   
 $y_G = \frac{1}{m_S} \int_S y dm$   
 $z_G = \frac{1}{m_S} \int_S z dm$

#### ◆ Remarque

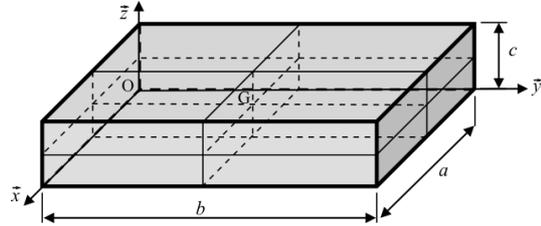
- Si le solide est homogène et présente un plan de symétrie alors son centre de masse appartient au plan de symétrie.
- Par conséquent, le centre de masse d'un solide homogène de révolution se situe sur l'axe de révolution.

- La position du centre d'inertie  $G_\Sigma$  d'un ensemble de  $i$  solides  $S_i$ , ayant chacun une masse  $m_i$  et un centre de masse  $G_i$ , est donnée par :  $\vec{OG}_\Sigma = \frac{\sum_i (m_i \vec{OG}_i)}{\sum_i m_i}$

**Exemple** Position du centre de masse d'un parallélépipède rectangle

Un parallélépipède rectangle a trois plans de symétrie : son centre de masse se situe donc en son milieu.

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}_R$$



## 2.3. Centre de masse et centre de gravité

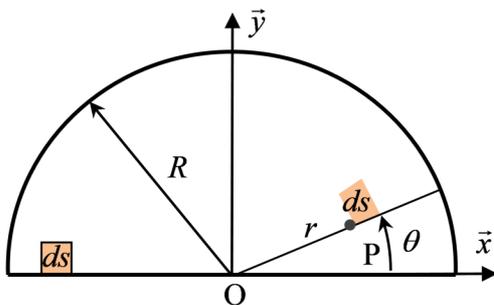
Le centre de gravité est le point où l'action de pesanteur peut être représentée par un glisseur.

$$\{T_{pes \rightarrow S}\} = \begin{cases} \vec{R}_{pes \rightarrow S} = \int_s \vec{g} dm \\ \vec{M}_{pes \rightarrow S}(G) = \int_s \vec{GP} \wedge \vec{g} dm = m \vec{GG} \wedge \vec{g} = \vec{0} \end{cases}$$

Le champ de pesanteur étant constant, le centre de gravité est confondu avec le centre de masse.

## 2.4. Position du centre de masse

**Exemple** Position du centre de masse d'un demi-disque



Demi-disque de masse surfacique  $\rho$  et d'aire  $A_S = \pi R^2 / 2$

Le demi-disque a un plan de symétrie  $(O \vec{y} \vec{z})$  donc  $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{x} = 0$ .

$$y_G = \frac{1}{m} \int_S y dm = \frac{2}{\pi R^2} \int_S y ds$$

Soit par changement de variable :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$

D'où  $ds = r d\theta dr$

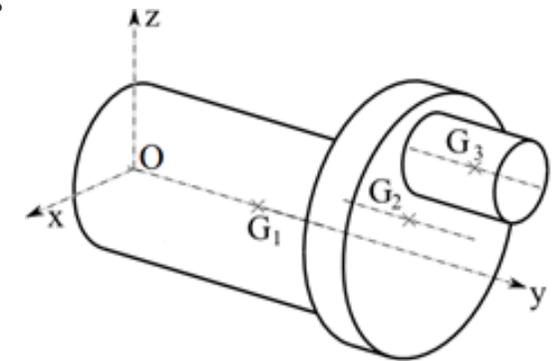
$$\text{Donc } y_G = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{\pi R^2} [\cos \theta]_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4R}{3\pi}$$

### Exemple Vilebrequin

Soit un vilebrequin formé de trois solides assemblés de masses  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  et de centres d'inertie respectifs  $G_1(0, y_{G1}, 0)_R$ ,  $G_2(0, y_{G2}, z_{G2})_R$  et  $G_3(0, y_{G3}, z_{G3})_R$ .

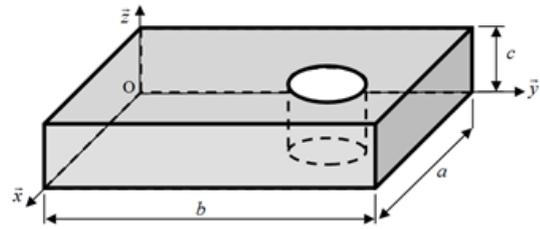
La position du centre d'inertie de l'ensemble est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG_\Sigma} &= \frac{m_1 \overrightarrow{OG_1} + m_2 \overrightarrow{OG_2} + m_3 \overrightarrow{OG_3}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \begin{pmatrix} 0 \\ m_1 y_{G1} + m_2 y_{G2} + m_3 y_{G3} \\ m_2 z_{G2} + m_3 z_{G3} \end{pmatrix}_R \end{aligned}$$



### Exemple Plaque Trouée

Soit une plaque initialement de masse  $m_1$  et de centre d'inertie  $G_1\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)_R$ . Elle est ensuite percée, le volume du trou aurait une masse  $m_2$  et son centre d'inertie serait  $G_2\left(\frac{a}{2}, \frac{3}{4}b, \frac{c}{2}\right)_R$  s'il était constitué du même matériau que la pièce.



# 3. Torseur cinétique ou des quantités de mouvement

A un solide  $S$  mobile par rapport à un repère  $R_g$ , on peut associer un torseur « cinétique » composé d'une résultante cinétique, qui est la somme des quantités de mouvement de l'ensemble des points du solide, et d'un moment résultant de ces quantités de mouvement, qui respecte la relation de champ de moment.

Le torseur cinétique d'un solide  $S$  par rapport au repère  $R_g$  est noté  $\{C_{S/g}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p(S/g)} \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/g)} \end{array} \right\}$ .

## 3.1. Quantité de mouvement et résultante cinétique

La quantité de mouvement  $\overrightarrow{p(P/g)}$  associée à un point matériel  $P$  de masse  $dm$ , dans son mouvement par rapport au repère  $R_g$ , est le produit de la vitesse  $\overrightarrow{V(P/g)}$  du point  $P$  par rapport au repère  $R_g$  par sa masse  $dm$  :

$$\overrightarrow{p(P/g)} = \overrightarrow{V(P/g)} dm$$

La résultante des quantités de mouvement de l'ensemble des points matériels constituant un solide est :

$$\overrightarrow{p(S/g)} = \int_S \overrightarrow{V(P/g)} dm$$

En utilisant le fait que le centre de masse est le barycentre des masses, on peut exprimer la quantité de mouvement du solide en fonction de la seule vitesse du centre de masse :

$$\overrightarrow{p(S/g)} = \int_S \overrightarrow{V(P/g)} dm = \int_S \left. \frac{d\overrightarrow{O_g P}}{dt} \right|_g dm = \frac{d}{dt} \int_S \overrightarrow{O_g P} dm \Big|_g = m \left. \frac{d\overrightarrow{O_g G}}{dt} \right|_g = m \overrightarrow{V(G/g)}$$

La résultante des quantités de mouvement de l'ensemble des points matériels constituant un solide est donc égale au produit de la masse  $m$  du solide par la vitesse de son centre d'inertie  $G$  par rapport au repère  $R_g$  :

$$\overrightarrow{p(S/g)} = m \overrightarrow{V(G/g)}$$

## 3.2. Moment cinétique

Le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma(A, P/g)}$  d'un point matériel  $P$  de masse  $dm$ , dans son mouvement par rapport au repère  $R_g$ , est le moment de la quantité de mouvement au point  $A$  considéré :

$$\overrightarrow{\sigma(A, P/g)} = \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{p(P/g)} = \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V(P/g)} dm$$

Pour le solide  $S$ , le moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma}(\mathbf{A}, S/g)$  en un point  $\mathbf{A}$  du solide est :

$$\overrightarrow{\sigma}(\mathbf{A}, S/g) = \int_S \overrightarrow{\mathbf{AP}} \wedge \overrightarrow{V(\mathbf{P}/g)} dm$$

En développant cette expression avec le champ des vitesses, on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma}(\mathbf{A}, S/g) &= \int_S \overrightarrow{\mathbf{AP}} \wedge \left( \overrightarrow{V(\mathbf{A}, S/g)} + \overrightarrow{\Omega}_{S/g} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AP}} \right) dm \\ &= \int_S \overrightarrow{\mathbf{AP}} \wedge \overrightarrow{V(\mathbf{A}, S/g)} dm + \int_S \overrightarrow{\mathbf{AP}} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega}_{S/g} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AP}} \right) dm \end{aligned}$$

En utilisant la propriété du centre de masse  $\int_S \overrightarrow{\mathbf{AP}} dm = m \overrightarrow{\mathbf{AG}}$  et en introduisant la notion de tenseur d'inertie  $\int_S \overrightarrow{\mathbf{AP}} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega}_{S/g} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AP}} \right) dm = \overline{\overline{I_{\mathbf{A},S}}} \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$ , on obtient l'expression suivante :

$$\overrightarrow{\sigma}(\mathbf{A}, S/g) = m \overrightarrow{\mathbf{AG}} \wedge \overrightarrow{V(\mathbf{A}, S/g)} + \overline{\overline{I_{\mathbf{A},S}}} \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$$

### ◆ Remarque

- Si le point  $\mathbf{A}$  est fixe dans le mouvement  $S/R_g$ ,  $\overrightarrow{V(\mathbf{A}, S/g)} = \overrightarrow{0}$ , alors :

$$\overrightarrow{\sigma}(\mathbf{A}, S/g) = \overline{\overline{I_{\mathbf{A},S}}} \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$$

- Si le point  $\mathbf{A}$  est le centre d'inertie  $\mathbf{G}$  alors :

$$\overrightarrow{\sigma}(\mathbf{G}, S/g) = \overline{\overline{I_{\mathbf{G},S}}} \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$$

Suite à ces remarques, on calcule en général le moment cinétique au centre de masse ou en un point fixe dans le mouvement puis on utilise la relation de champs de moment pour l'obtenir en un autre point.

Le moment cinétique obéit à la relation fondamentale des champs de moments :

$$\overrightarrow{\sigma}(\mathbf{A}, S/g) = \overrightarrow{\sigma}(\mathbf{B}, S/g) + \overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{p(S/g)}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma}(\mathbf{A}, S/g) &= \int_S \overrightarrow{\mathbf{AP}} \wedge \overrightarrow{V(\mathbf{P}/g)} dm \\ &= \int_S (\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BP}}) \wedge \overrightarrow{V(\mathbf{P}/g)} dm \\ &= \int_S \overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{V(\mathbf{P}/g)} dm + \int_S \overrightarrow{\mathbf{BP}} \wedge \overrightarrow{V(\mathbf{P}/g)} dm \\ &= \overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge m \overrightarrow{V(\mathbf{G}/g)} + \overrightarrow{\sigma}(\mathbf{B}, S/g) \\ &= \overrightarrow{\sigma}(\mathbf{B}, S/g) + \overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{p(S/g)} \end{aligned}$$

## 4. Tenseur d'inertie

Un tenseur est un objet mathématique, représentant des applications multilinéaires, dont les coordonnées changent lorsque l'on passe d'une base à une autre alors qu'une matrice n'est qu'un simple tableau de nombres, pouvant représenter des objets abstraits.

Le tenseur d'inertie traduit la répartition de la masse d'un solide par rapport à un repère : ces termes sont homogènes à une masse multipliée par une distance au carré.

### 4.1. Opérateur d'inertie

Le produit vectoriel peut être vu comme une application linéaire :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_R \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = [U] \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$$

Le double produit vectoriel est donc :

$$\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \wedge \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} y(ay - bx) - z(cx - az) \\ z(bz - cy) - x(ay - bx) \\ x(cx - az) - y(bz - cy) \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$$

$$[V] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}_R \Rightarrow -[V]^2 = - \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_R$$

En prenant  $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$  position d'un point matériel P appartenant au solide S par

rapport au point O et  $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega_{S/g}}$ , on définit le tenseur d'inertie  $\overline{\overline{I_{O,S}}}$  en un point O comme étant l'intégrale suivante :

$$\overline{\overline{I_{O,S}}} = \int_S -[V]^2 dm$$

$$= \int_S \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_R dm$$

$$= \begin{bmatrix} \int_S y^2 + z^2 dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S z^2 + x^2 dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S x^2 + y^2 dm \end{bmatrix}_R$$

## Remarque

Le tenseur d'inertie  $\overline{\overline{I_{O,S}}}$  dépend du point où il est défini et de la base dans laquelle il est exprimé.

Le tenseur d'inertie est généralement noté dans une base liée au solide  $R_i(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\overline{\overline{I_{O,S}}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}_{R_i} \quad \text{ou suivant la notation de Binet :}$$

$$\overline{\overline{I_{O,S}}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_i}$$

$$A = I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm \geq 0 \quad -D = I_{yz} = I_{zy} = - \int_S yz dm$$

$$\text{Avec } B = I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2) dm \geq 0 \text{ et } -E = I_{xz} = I_{zx} = - \int_S xz dm$$

$$C = I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm \geq 0 \quad -F = I_{xy} = I_{yx} = - \int_S xy dm$$

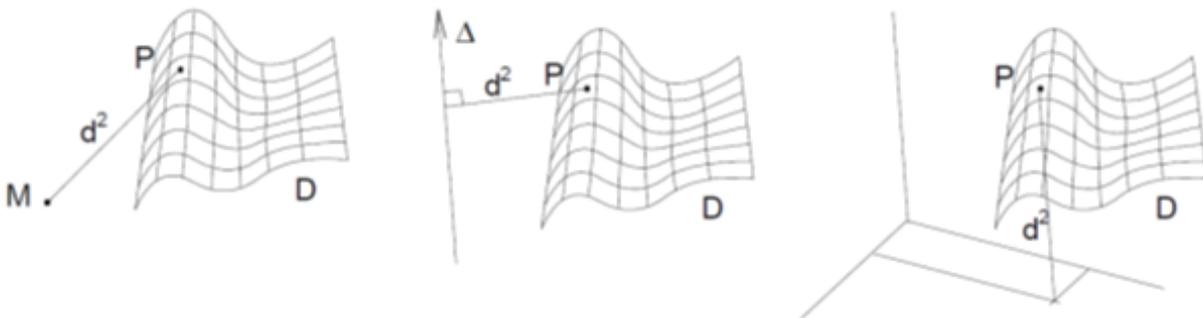
$A$ ,  $B$  et  $C$  sont les moments d'inertie respectivement par rapport aux axes  $(O\vec{x})$ ,  $(O\vec{y})$  et  $(O\vec{z})$ .

$D$ ,  $E$  et  $F$  sont les produits d'inertie.

## 4.2. Interprétation des éléments du tenseur d'inertie

Le moment d'inertie d'un solide  $S$  par rapport à un élément  $\varepsilon$  (un point, une droite ou un plan) est le scalaire :  $I_\varepsilon = \int_S d^2 dm$

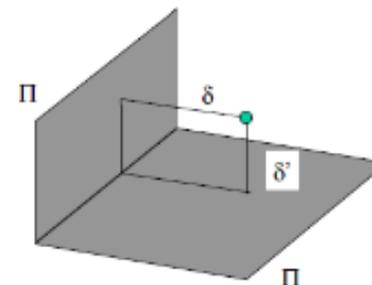
où  $d$  est la distance du point courant  $P$  à l'élément  $\varepsilon$ .



Le produit d'inertie d'un solide par rapport à deux plans orthogonaux est le scalaire :

$$I_{\Pi\Pi'} = - \int_S \delta \delta' dm$$

où  $\delta$  est la distance du point courant P au plan  $\Pi$  et  $\delta'$  est la distance du point courant P au plan  $\Pi'$ .



### 4.3. Relation entre les moments d'inertie

Moment par rapport à un plan :

$$I_{yOz} = \int_S x^2 dm$$

$$I_{zOx} = \int_S y^2 dm$$

$$I_{xOy} = \int_S z^2 dm$$

Moment par rapport à un axe :

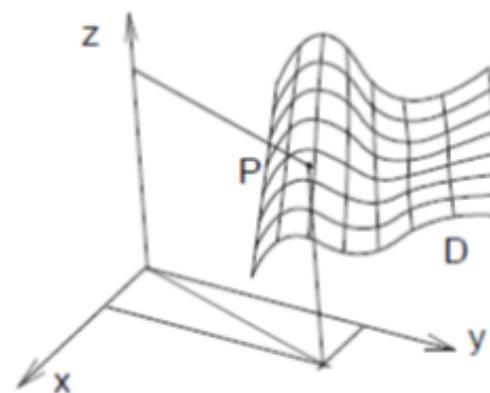
$$I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm = I_{zOx} + I_{xOy}$$

$$I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2) dm = I_{yOz} + I_{xOy}$$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm = I_{yOz} + I_{zOx}$$

Moment par rapport à un point :

$$I_O = \int_S d^2 dm = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm = I_{yOz} + I_{zOx} + I_{xOy}$$



Le moment d'inertie par rapport à une droite est la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans orthogonaux qui se coupent suivant cette droite.

Le moment d'inertie par rapport à un point est la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans orthogonaux qui se coupent en ce point.

## 4.4. Forme du tenseur d'inertie pour des solides ayant des symétries

### 4.4.1. Tenseur d'inertie d'un solide ayant un plan de symétrie

Si un solide homogène possède un plan de symétrie alors les produits d'inertie relatifs à ce plan sont nuls.

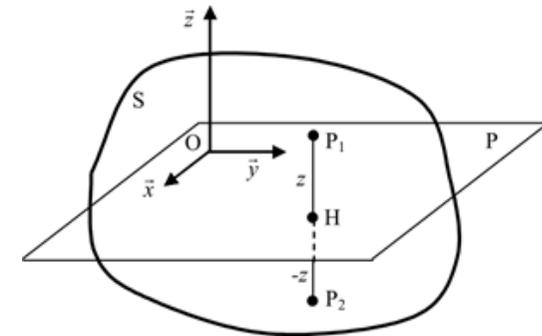
Par exemple, si le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  est plan de symétrie du solide  $S$  alors le tenseur d'inertie de  $S$  en  $O$  exprimé dans la base  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est de la forme :

$$\underline{\underline{I_{O,S}}} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_R$$

$$D = \int_{S_{z^+}} yz dm + \int_{S_{z^-}} yz dm = \int_{S_{z^+}} y(z - z) dm = 0$$

$$E = \int_{S_{z^+}} xz dm + \int_{S_{z^-}} xz dm = \int_{S_{z^+}} x(z - z) dm = 0$$

L'axe  $(O, \vec{z})$  est un axe principal d'inertie pour tout point  $O$  du plan de symétrie.



### 4.4.2. Tenseur d'inertie d'un solide de révolution

Si le solide homogène présente un axe de révolution alors tous les plans contenant cet axe sont des plans de symétrie. Le tenseur d'inertie, exprimé en un point  $O$  de l'axe de révolution  $(O, \vec{z})$  et dans une base dont l'un des axes est l'axe de révolution, est de la forme :

$$\overline{\overline{I}}_{O,S} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_R$$

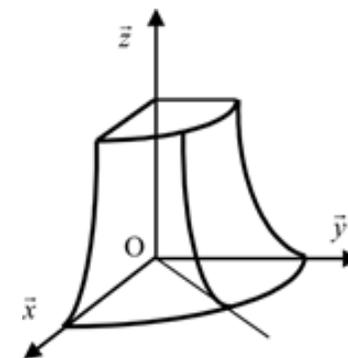
car les plans  $(O, \vec{x}, \vec{z})$  et  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  sont plans de symétrie donc :

$$D = 0 = \int_{S_{y+}} yz \, dm + \int_{S_{y-}} yz \, dm = \int_{S_{y+}} (y - y) z \, dm$$

$$E = 0 = \int_{S_{x+}} xz \, dm + \int_{S_{x-}} xz \, dm = \int_{S_{x+}} (x - x) z \, dm$$

$$F = 0 = \int_{S_{y+}} xy \, dm + \int_{S_{y-}} xy \, dm = \int_{S_{y+}} x(y - y) \, dm$$

$$\text{et } B = \int_S (y^2 + z^2) \, dm = \int_S (x^2 + z^2) \, dm = \int_S (y^2 + z^2) \, dm = A$$



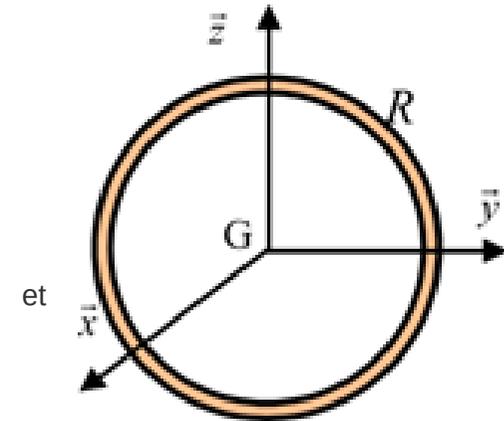
## 4.5. Exemples de tenseurs d'inertie pour des solides homogènes

 **Exemple** Sphère mince de rayon  $R$  et de masse  $m$

$$\overline{\overline{I_{G,S}}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} mR^2 \end{bmatrix}_R$$

Du fait des symétries,  $D = E = F = 0$

$$A = B = C = \frac{2}{3} I_O = \frac{2}{3} \int_S x^2 + y^2 + z^2 dm = \frac{2}{3} \int_S R^2 dm = \frac{2}{3} mR^2$$

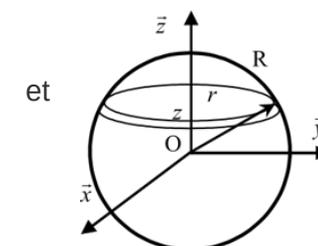
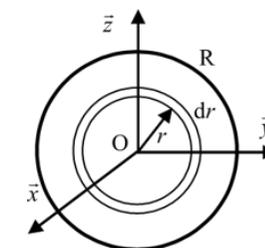


### Exemple

**Boule de rayon  $R$  et de masse  $m$**

$$\overline{\overline{I_{G,S}}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} mR^2 \end{bmatrix}_R$$

Du fait des symétries,  $D=E=F=0$   
 $A = B = C = \frac{2}{3} I_O = \frac{2}{3} \int_S r^2 dm = \frac{2}{3} \int_S r^2 \rho 4\pi r^2 dr = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \pi \rho R^5 = \frac{2}{5} mR^2$  avec  $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$

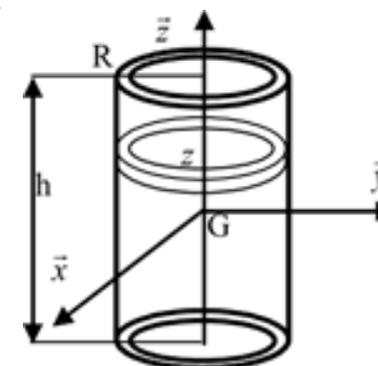


### Exemple

**Cylindre de révolution, creux, mince, de rayon  $R$ , de hauteur  $h$  et de masse  $m$**

$$\overline{\overline{I_{G,S}}} = \begin{bmatrix} \frac{m(h^2+6R^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(h^2+6R^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix}_R$$

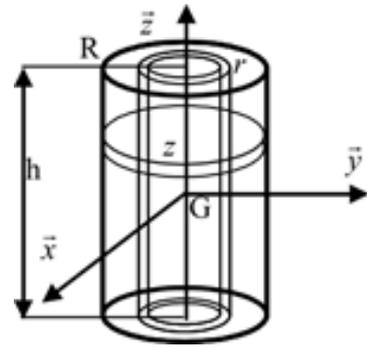
Du fait des symétries,  $D=E=F=0$  et  $A = B = \frac{m(h^2+6R^2)}{12}$   
 $C = \int_S R^2 dm = mR^2$



### Exemple

**Cylindre de révolution, plein** de rayon  $R$ , de hauteur  $h$  et de masse  $m$

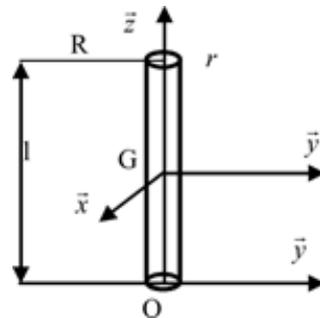
$$\overline{\overline{I_{G,S}}} = \begin{bmatrix} \frac{m(h^2+3R^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(h^2+3R^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_R$$



### Exemple

**Barre** de longueur  $l$  et de masse  $m$

$$\overline{\overline{I_{G,S}}} = \begin{bmatrix} ml^2/12 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_R$$

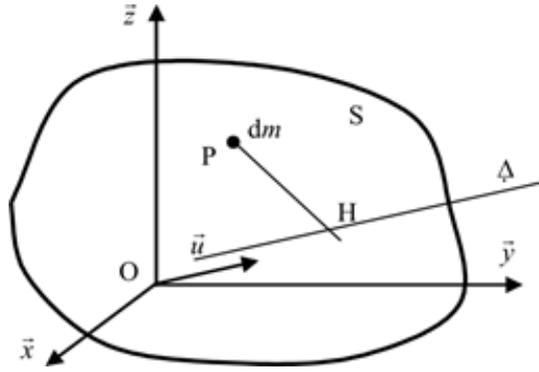


## 4.6. Moment d'inertie par rapport à un axe connaissant le tenseur en un point de l'axe

Connaissant le tenseur d'inertie  $\overline{\overline{I_{O,S}}}$  du solide  $S$  au point  $O$  et dans la base  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on peut déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta = (O\vec{u})$  passant par  $O$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  par le double produit suivant :  $I_{\Delta} = \vec{u} \overline{\overline{I_{O,S}}} \vec{u}$

### Démonstration

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta} &= \int_S PH^2 dm > 0 \\
 &= \int_S \left( \vec{u} \wedge \vec{OP} \right)^2 dm \\
 &= \int_S \left( \vec{u} \wedge \vec{OP} \right) \cdot \left( \vec{u} \wedge \vec{OP} \right) dm \\
 &= \vec{u} \cdot \int_S \vec{OP} \wedge \left( \vec{u} \wedge \vec{OP} \right) dm \\
 &= \overline{\overline{\vec{u} I_{O,S} \vec{u}}}
 \end{aligned}$$



### Remarque

On appelle rayon de giration par rapport à l'axe  $\Delta$ , le scalaire  $R$  défini par :  $I_{\Delta} = m r^2$

### Exemple Exemple général de calcul

$$\text{Si } \overline{\overline{I_{O,S}}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_R \text{ avec } \|\vec{u}\| = 1$$

alors :

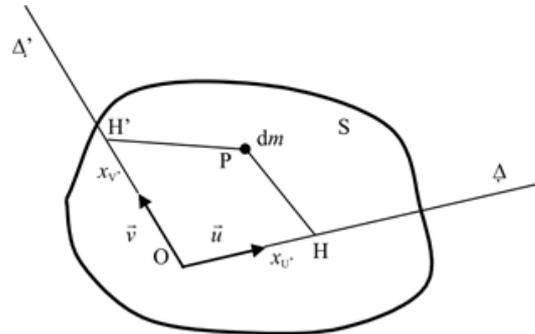
$$\begin{aligned}
 I_{\Delta} &= \vec{u} \overline{\overline{I_{O,S}}} \vec{u} \\
 &= (u_x \ u_y \ u_z)_R \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_R \\
 &= (u_x \ u_y \ u_z)_R \begin{pmatrix} Au_x - Fu_y - Eu_z \\ Fu_x + Bu_y - Du_z \\ Eu_x - Du_y + Cu_z \end{pmatrix}_R \\
 &= (u_x \ u_y \ u_z)_R \begin{pmatrix} Au_x - Fu_y - Eu_z \\ Fu_x + Bu_y - Du_z \\ Eu_x - Du_y + Cu_z \end{pmatrix}_R \\
 &= Au_x^2 - Fu_y u_x - Eu_z u_x - Fu_x u_y + Bu_y^2 - Du_z u_y - Eu_x u_z - Du_y u_z + Cu_z^2 \\
 &= Au_x^2 + Bu_y^2 + Cu_z^2 - 2Du_y u_z - 2Eu_x u_z - 2Fu_x u_y
 \end{aligned}$$

## 4.7. Produit d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux connaissant le tenseur d'inertie

Connaissant le tenseur d'inertie  $\overline{\overline{I_{O,S}}}$  du solide  $S$  au point  $O$  et dans la base  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on peut déterminer le produit d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux en  $O$ ,  $\Delta = (O\vec{u})$  et  $\Delta' = (O\vec{v})$ , par le double produit suivant :  $I_{\Delta\Delta'} = -\vec{u} \cdot \overline{\overline{I_{O,S}}} \cdot \vec{v}$  ou  $I_{\Delta\Delta'} = -\vec{v} \cdot \overline{\overline{I_{O,S}}} \cdot \vec{u}$

### Démonstration

$$\begin{aligned} I_{\Delta\Delta'} &= - \int_S \text{PH} \cdot \text{PH}' dm \\ &= - \int_S \left( \vec{u} \wedge \vec{OP} \right) \cdot \left( \vec{v} \wedge \vec{OP} \right) dm \\ &= - \int_S \vec{u} \cdot \left( \vec{OP} \wedge \vec{v} \wedge \vec{OP} \right) dm \\ &= - \vec{u} \cdot \overline{\overline{I_{O,S}}} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$



## 4.8. Transport du tenseur d'inertie

On peut calculer le tenseur d'inertie d'un solide en tout point (fixe par rapport au solide) à partir du tenseur d'inertie au centre d'inertie en utilisant le **théorème de Koenig** :  $\overline{\overline{I_{O,S}}} = \overline{\overline{I_{G,S}}} + \overline{\overline{I_{O,m}}}$

Le tenseur d'inertie au point  $O$  d'un solide est égal au tenseur d'inertie au centre d'inertie  $G$  du solide augmenté du tenseur d'inertie au point  $O$  de la masse totale du solide concentrée au centre d'inertie  $G$ .

Si le tenseur d'inertie au centre d'inertie  $G$  est  $\overline{\overline{I_{G,S}}} = \begin{bmatrix} A^* & -F^* & -E^* \\ -F^* & B^* & -D^* \\ -E^* & -D^* & C^* \end{bmatrix}_R$

la masse du solide est  $m$  et la position du centre d'inertie  $G$  est définie par  $\vec{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

$$\text{Alors } \overline{\overline{I_{O,S}}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R \quad \text{avec } \begin{aligned} A &= A^* + m(b^2 + c^2) & D &= D^* + mbc \\ B &= B^* + m(c^2 + a^2) & E &= E^* + mca \\ C &= C^* + m(a^2 + b^2) & F &= F^* + mab \end{aligned}$$

$$\overline{\overline{I_{O,S}}} = \overline{\overline{I_{G,S}}} + \overline{\overline{I_{O,m}}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} A^* & -F^* & -E^* \\ -F^* & B^* & -D^* \\ -E^* & -D^* & C^* \end{bmatrix}_R + m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab \\ -ab & c^2 + a^2 \\ -ca & -bc \end{bmatrix}$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{I}}_{O,S} \vec{\Omega} &= \int_S \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}) dm \\
&= \int_S (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}) \wedge \left( \vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}) \right) dm \\
&= \int_S \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) dm + \int_S \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GP}) dm + \int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) dm + \int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GP}) dm \\
&= \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) \int_S dm + \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \int_S \overrightarrow{GP} dm) + \int_S \overrightarrow{GP} dm \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) + \overline{\overline{I}}_{G,S} \vec{\Omega} \\
&= \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) m + \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{0}) + \vec{0} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) + \overline{\overline{I}}_{G,S} \vec{\Omega} \\
&= m \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) + \overline{\overline{I}}_{G,S} \vec{\Omega} \\
&= \overline{\overline{I}}_{O,m} \vec{\Omega} + \overline{\overline{I}}_{G,S} \vec{\Omega} \\
\text{Donc } \overline{\overline{I}}_{O,S} &= \overline{\overline{I}}_{O,m} + \overline{\overline{I}}_{G,S}
\end{aligned}$$

◆ **Remarque**

Pour transporter le tenseur d'inertie d'un point à un autre, il faut obligatoirement passer par le centre d'inertie.

$$\overline{\overline{I}}_{A,S} \Rightarrow \overline{\overline{I}}_{G,S} = \overline{\overline{I}}_{A,S} - \overline{\overline{I}}_{A,m} \Rightarrow \overline{\overline{I}}_{B,S} = \overline{\overline{I}}_{G,S} + \overline{\overline{I}}_{B,m}$$

Ce théorème de Koenig contient le théorème de Huygens :

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à la droite  $(O\vec{u})$  est égal au moment d'inertie du solide par rapport à la droite  $(G\vec{u})$  augmenté du moment d'inertie de la masse du solide concentrée en G par rapport à la droite  $(O\vec{u})$ .

$$A = A^* + m(b^2 + c^2)$$

$$\text{En particulier : } B = B^* + m(c^2 + a^2)$$

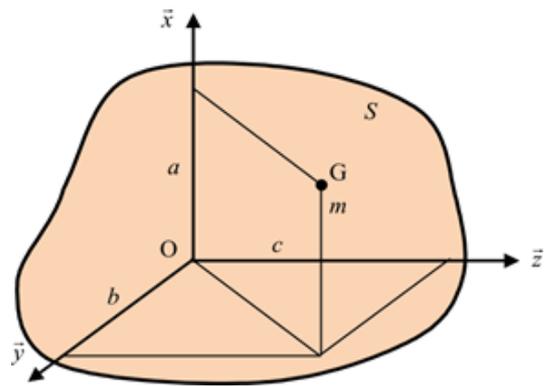
$$C = C^* + m(a^2 + b^2)$$

Le produit d'inertie d'un solide par rapport à 2 droites perpendiculaires  $(O\vec{u})$  et  $(O\vec{v})$  est égal au produit d'inertie du solide par rapport aux droites  $(G\vec{u})$  et  $(G\vec{v})$  augmenté du produit d'inertie de la masse du solide concentrée en G par rapport aux droites  $(O\vec{u})$  et  $(O\vec{v})$ .

$$D = D^* + mbc$$

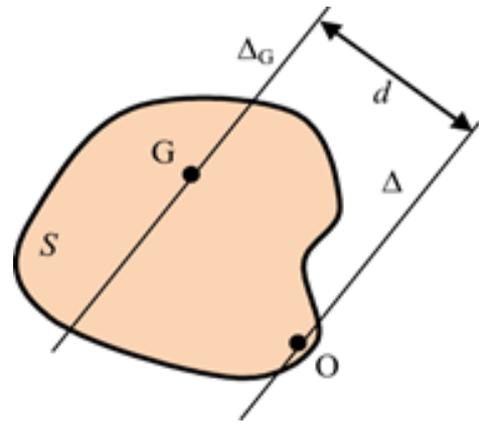
$$\text{En particulier : } E = E^* + mca$$

$$F = F^* + mab$$



Pour deux axes parallèles dont l'un passe par le centre d'inertie  $G$ , on a :  $I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + md^2$

Parmi tous les axes parallèles, le moment d'inertie est minimum par rapport à l'axe passant par centre d'inertie.

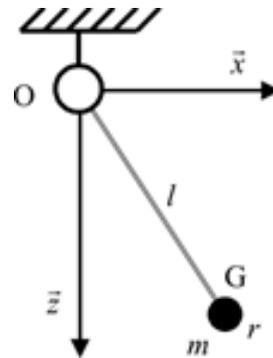


**Exemple** Pendule simple

Le pendule est modélisé par une boule de rayon  $r$ .

$$I_{O\vec{y}} = I_{G\vec{y}} + ml^2$$

$$= \frac{2}{5} mr^2 + ml^2$$



### 4.9. Changement de repère de la matrice d'inertie

Pour exprimer le tenseur d'inertie dans une base  $R_j$  à partir de son expression dans la base  $R_i$ , on utilisera les relations suivantes :

$$\overline{\overline{I_{G,S_{R_j}}}} = \begin{bmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{bmatrix}_{R_j} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A' &= \vec{x}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{x}_j \\ B' &= \vec{y}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{y}_j \\ C' &= \vec{z}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{z}_j \end{aligned} \quad \text{et}$$

$$-D' = \vec{z}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{y}_j = \vec{y}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{z}_j$$

$$-E' = \vec{z}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{x}_j = \vec{x}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{z}_j$$

$$-F' = \vec{x}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{y}_j = \vec{y}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{x}_j$$

Les vecteurs  $\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j$  de base de  $R_j$  exprimés dans  $R_i$ .

Cette méthode est avantageuse par rapport à la formule de changement de base de l'opérateur linéaire que représente le tenseur d'inertie :  $\overline{\overline{I_{G,S}}}_{R_j} = [P_{ji}] \cdot \overline{\overline{I_{G,S}}}_{R_i} [P_{ji}]^t$  avec  $[P_{ji}]$  la matrice de passage.

Elle décompose le calcul élément par élément et le rend plus succinct évitant tout produit matriciel.

## 4.10. Repère principal d'inertie

La matrice du tenseur d'inertie est symétrique et à coefficients réels. Elle est diagonalisable dans la base propre du tenseur.

Les directions propres sont orthogonales et appelées directions principales. Elles forment la base  $R_p$ .

Les valeurs propres réelles et positives sont les moments d'inertie principaux  $A_p$ ,  $B_p$ , et  $C_p$ .

$$\overline{\overline{I_{O,S}}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & B_p & 0 \\ 0 & 0 & C_p \end{bmatrix}_{R_p}$$

### ◆ Remarque

La trace et le déterminant du tenseur sont invariants.

- La trace est  $Tr(\overline{\overline{I_{O,S}}}) = A + B + C = A_p + B_p + C_p$
- Le déterminant est  $\det(\overline{\overline{I_{O,S}}}) = A_p B_p C_p = ABC - 2FDE - BE^2 - AD^2 - CF^2$

# 5. Torseur dynamique ou des quantités d'accélération

A un solide  $S$  mobile par rapport à un repère  $R_g$ , on peut associer un torseur « dynamique » composé d'une résultante dynamique, qui la somme des quantités d'accélération du solide, et d'un champ de moment.

Le torseur dynamique du solide  $S$  par rapport au repère  $R_g$  est noté  $\{D_{S/g}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{D(S/g)} \\ \overrightarrow{\delta(A, S/g)} \end{array} \right\}$ .

## 5.1. Quantité d'accélération et résultante dynamique

La quantité d'accélération  $\overrightarrow{D(P/g)}$  associée à un point matériel  $P$  de masse  $dm$ , dans son mouvement par rapport au repère  $R_g$ , est le produit de l'accélération  $\overrightarrow{\Gamma(P/g)}$  du point  $P$  par rapport au repère  $R_g$  par sa masse  $dm$  :  $\overrightarrow{D(P/g)} = \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm$

La résultante des quantités d'accélération de l'ensemble des points matériels constituant un solide est :

$$\overrightarrow{D(S/g)} = \int_S \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm$$

$$\overrightarrow{D(S/g)} = \int_S \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm = \frac{d^2}{dt^2} \int_S \overrightarrow{O_g P} dm \Big|_g = \frac{d^2}{dt^2} m \overrightarrow{O_g G} \Big|_g = m \overrightarrow{\Gamma(G/g)}$$

Cette résultante est aussi égale au produit de la masse  $m$  du solide par l'accélération de son centre d'inertie  $G$  par rapport au repère  $R_g$  :  $\overrightarrow{D(S/g)} = m \overrightarrow{\Gamma(G/g)}$

## 5.2. Moment dynamique

Le moment dynamique  $\overrightarrow{\delta(A, P/g)}$  d'un point matériel  $P$  de masse  $dm$ , dans son mouvement par rapport au repère  $R_g$ , est le moment de la quantité d'accélération au point  $A$  considéré :

$$\overrightarrow{\delta(A, P/g)} = \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm$$

Le moment dynamique  $\overrightarrow{\delta(A, S/g)}$  d'un solide  $S$ , dans son mouvement par rapport au repère  $R_g$ , en un point  $A$ , lié au solide, est :

$$\overrightarrow{\delta(A, S/g)} = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm$$

On peut aussi exprimer le moment dynamique en fonction du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\delta(A, S/g)} = \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{\sigma(A, S/g)} \right)_g + \overrightarrow{V(A/g)} \wedge m \overrightarrow{V(G/g)}$$

En dérivant le moment cinétique, on a en effet :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{\sigma(A, S/g)} \right)_g &= \frac{d}{dt} \left( \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V(P/g)} dm \right)_g \\ &= \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{V(P/g)} \right)_g dm + \int_S \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{AP} \right)_g \wedge \overrightarrow{V(P/g)} dm \quad \text{car } (uv)' = u'v + uv' \\ &= \overrightarrow{\delta(A, S/g)} + \int_S \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{O_g P} - \overrightarrow{O_g A} \right)_g \wedge \overrightarrow{V(P/g)} dm \\ &= \overrightarrow{\delta(A, S/g)} + \int_S \overrightarrow{V(P/g)} \wedge \overrightarrow{V(P/g)} dm - \overrightarrow{V(A/g)} \wedge m \overrightarrow{V(G/g)} \\ &= \overrightarrow{\delta(A, S/g)} - \overrightarrow{V(A/g)} \wedge m \overrightarrow{V(G/g)} \end{aligned}$$

### ◆ Remarque

- Si le point  $A$  est fixe dans le repère  $R_g$ ,  $\overrightarrow{V(A/g)} = \vec{0}$ , alors

$$\overrightarrow{\delta(A, S/g)} = \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{I_{A,S}} \Omega_{S/g} \right)_g$$

- Si le point  $A$  est le centre d'inertie  $G$  alors  $\overrightarrow{\delta(G, S/g)} = \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{I_{G,S}} \Omega_{S/g} \right)_g$

Ce champ de vecteurs obéit à la relation fondamentale des champs de moments :

$$\overrightarrow{\delta(A, S/g)} = \overrightarrow{\delta(B, S/g)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{D(S/g)}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta(A, S/g)} &= \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm \\ &= \int_S (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \wedge \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm \\ &= \int_S \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm + \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{\Gamma(P/g)} dm \\ &= \overrightarrow{AB} \wedge m \overrightarrow{\Gamma(G/g)} + \overrightarrow{\delta(B, S/g)} \\ &= \overrightarrow{\delta(B, S/g)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{D(S/g)} \end{aligned}$$

### 5.3. Cas d'un ensemble de solides mobiles entre eux

---

Lorsque l'on isole un ensemble de solides mobiles entre eux, le torseur dynamique de l'ensemble est égale à la somme des torseurs dynamique de chaque solide :

$$\{D_{\Sigma/g}\} = \sum_i \{D_{i/g}\} = \sum_i \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{D(i/g)} \\ \overrightarrow{\delta(A, i/g)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{D(\Sigma/g)} \\ \overrightarrow{\delta(A, \Sigma/g)} \end{array} \right\}$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{D(\Sigma/g)} = \sum_i m_i \overrightarrow{\Gamma(G_i/g)} \text{ et } \overrightarrow{\delta(A, \Sigma/g)} = \sum_i \overrightarrow{\delta(A, i/g)}$$

### 5.4. Exemple d'un pendule

---

### Exemple Illustration avec un pendule simple

Soit un solide considéré comme une masse ponctuelle  $m$  concentrée en  $G$  et en liaison pivot d'axe  $(O\vec{y})$  avec un bâti paramétrée  $\theta = (\vec{z}_g, \vec{z}_1)$ .

$$\overrightarrow{OG} = l\vec{z}_1$$

$$\overrightarrow{V(G/g)} = \dot{\theta} \vec{y} \wedge l\vec{z}_1 = l\dot{\theta} \vec{x}_1$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G/g)} = l\ddot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\theta} \vec{y} \wedge l\dot{\theta} \vec{x}_1 = l\ddot{\theta} \vec{x}_1 - l\dot{\theta}^2 \vec{z}_1$$

Le solide est soumis à la pesanteur  $\overrightarrow{P_{g \rightarrow 1}} = mg\vec{z}_g$ .

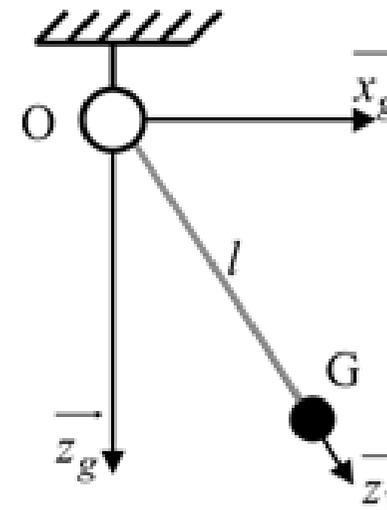
Un couple moteur  $\overrightarrow{C_{0 \rightarrow 1}}(O) = C_m \vec{y}$  est appliqué entre le bâti et le solide en  $O$ .

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext \rightarrow S}} = m \overrightarrow{\Gamma(G/g)} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{01} = m(l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ Y_{01} + mg = m(l\ddot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta) \end{cases}$$

$$\sum \overrightarrow{M_{ext \rightarrow S}}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge m \overrightarrow{\Gamma(G/g)} \Leftrightarrow C_m = ml^2 \ddot{\theta}$$

$ml^2 = I_{(O\vec{y})}$  est appelé « moment d'inertie ».



# 6. Lois de comportement

Les lois de comportement modélisent mathématiquement un comportement physique. Elles permettent d'exprimer les actions mécaniques à partir de données caractéristiques (masse, constantes physiques, raideur, amortissement...) et des paramètres cinématiques (positions, vitesses...).

## 6.1. Théorie de la gravitation universelle

Selon la théorie de la gravitation universelle de Newton, à tous les corps massifs, dont la Terre, est associé un champ de gravitation responsable d'une force attractive sur les autres corps massifs.

Un corps de masse  $m_1$  exerce une action mécanique attractive sur un corps de masse  $m_2$  proportionnelle à chacune des masses et à l'inverse du carré de la distance qui les sépare et dont la direction passe par les centres de gravité  $G_1$  et  $G_2$  de ces deux corps.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = - \frac{G m_1 m_2}{G_1 G_2^2} \frac{\vec{G}_1 G_2}{\|\vec{G}_1 G_2\|} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle égale à  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  (ou  $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ).

## 6.2. Pesanteur terrestre

Le champ de pesanteur terrestre est le champ attractif qui s'exerce sur tout corps doté d'une masse au voisinage de la Terre. Il s'agit d'un champ d'accélération dont la valeur normale  $g$  est fixée à  $9,80665 \text{ m/s}^2$  (soit approximativement  $9,81 \text{ m/s}^2$ ) depuis la Conférence générale des poids et mesures de 1901. Cette valeur est établie à l'altitude 0, sur un ellipsoïde idéal approchant la surface terrestre, pour une latitude de  $45^\circ$ .

L'essentiel de la pesanteur est d'origine gravitationnelle, c'est-à-dire due à l'attraction mutuelle entre corps massifs. Toutefois, une correction sous la forme d'une accélération d'entraînement axifuge doit être introduite du fait que la pesanteur terrestre est définie dans le référentiel terrestre et que la Terre est en rotation autour de son axe.

L'action mécanique à laquelle est soumis un corps en raison de la pesanteur est appelée « poids » et est proportionnelle à sa masse.

L'action de pesanteur permet de définir la notion de verticalité : on observe qu'en un lieu donné tous les corps libres tombent en direction du sol suivant la même direction appelée verticale du lieu.

Le torseur résultant de l'action pesanteur sur un corps de masse  $m$  et de centre de masse  $G$  est dans un repère où  $\vec{z}_g$  est l'axe vertical ascendant :

$$\{T_{pes \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{pes \rightarrow S} = -mg\vec{z}_g \\ \vec{M}_{pes \rightarrow S}(G) = \vec{0} \end{array} \right\} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{array} \right)_{R_g}^G$$

## 6.3. Ressorts

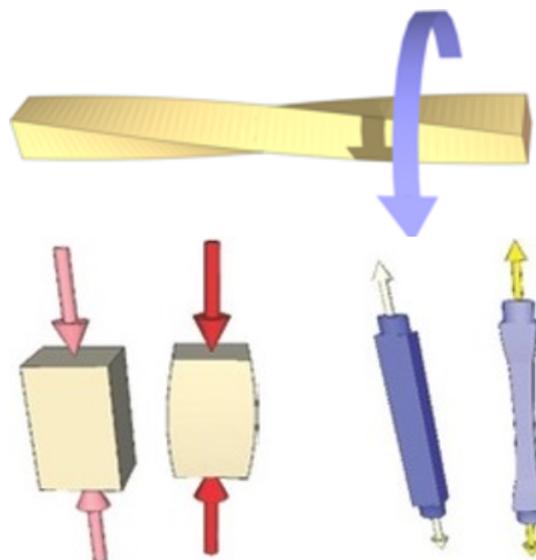
Un ressort est un élément déformable reliant deux solides. Ce type de comportement élastique est utilisé pour modéliser un ressort « réel » ou l'élasticité d'un solide déformable. Les lois de déformation d'un ressort sont données par la résistance des matériaux.



*Ressorts de traction/compression*



*Ressort de torsion*



*Poutre déformable*

### 6.3.1. Ressort de traction/compression

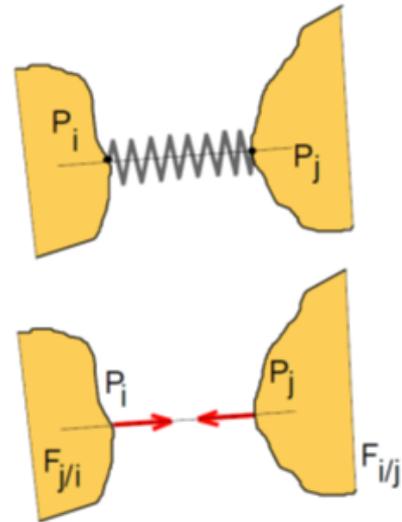
Soit un ressort de traction/compression de raideur  $k$  [N/m] et de longueur à vide  $l_0$  ancrer au solide  $S_i$  en un point  $P_i$  et au solide  $S_j$  en  $P_j$ .

On considère que le solide  $S_i$  agit sur le solide  $S_j$ , par l'intermédiaire du ressort, sous la forme d'un glisseur dont la résultante est :

$$\vec{F}_{i \rightarrow j} = -k(l - l_0) \vec{u} = -\vec{F}_{j \rightarrow i}$$

où

$$\vec{u} = \frac{\vec{P_i P_j}}{\|\vec{P_i P_j}\|} = \frac{\vec{P_i P_j}}{l}$$



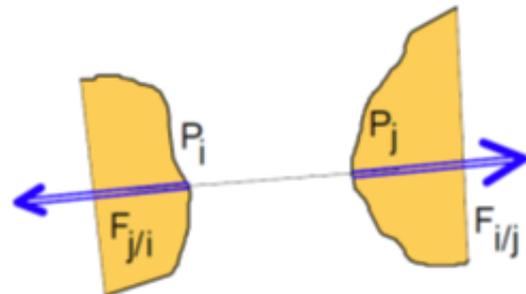
### 6.3.2. Ressort de torsion

Soit un ressort de torsion de raideur  $k$  [N/rad] de position angulaire à vide  $\theta_0$ .

On considère que le solide  $S_i$  agit sur le solide  $S_j$ , par l'intermédiaire du ressort, sous la forme d'un couple dont le moment est :

$$\vec{M}_{i \rightarrow j}(\mathbf{P}) = -k(\theta - \theta_0) \vec{u} = -\vec{M}_{j \rightarrow i}(\mathbf{P})$$

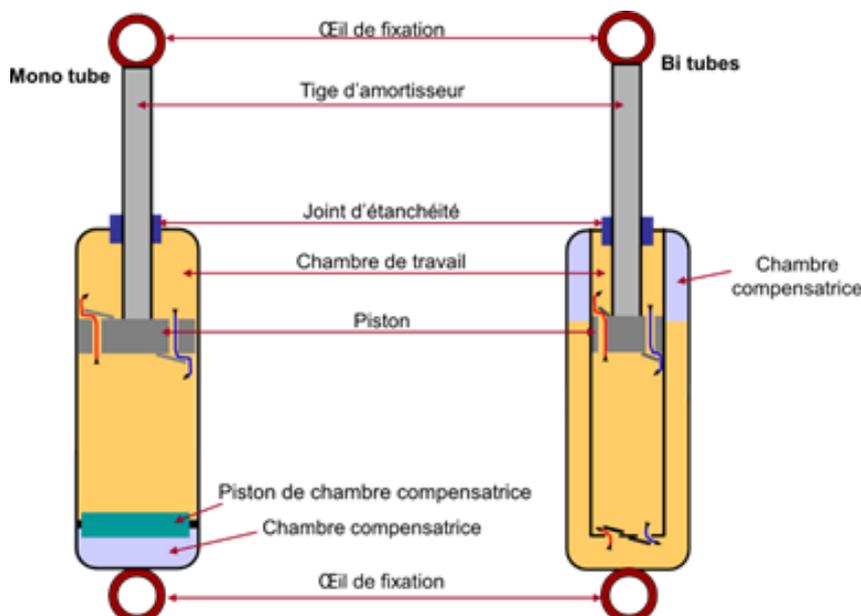
où  $\vec{u} = \frac{\vec{P_i P_j}}{l}$  est la direction de l'axe de rotation.



## 6.4. Amortisseurs

Un amortisseur est un élément dissipatif qui a pour effet réduit l'amplitude d'un mouvement ou de le ralentir. L'amortissement peut provenir des caractéristiques du matériau ou système conçu à cet effet.

Un amortisseur hydraulique est constitué de deux parties qui contraignent un liquide visqueux à passer à travers des orifices de section réduite : la viscosité (résistance à l'écoulement) du fluide permet de dissiper de l'énergie lors de ce passage. La loi de variation d'effort dans l'amortisseur est fonction de la viscosité du fluide, de la section des trous, et de la vitesse d'écoulement du fluide dans les trous.

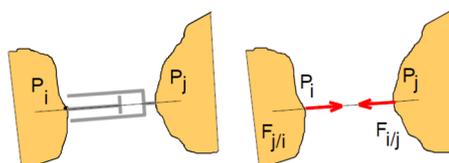


### 6.4.1. Amortisseur de translation

Soit un amortisseur de translation de coefficient d'amortissement  $c$  [N.s/m].

On considère que le solide  $S_i$  agit sur le solide  $S_j$ , par l'intermédiaire de l'amortisseur, sous la forme d'un effort dont la résultante est :

$$\overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} = -c \dot{\vec{u}} = -c \left( \overrightarrow{V(P_j, j/i)} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} = -\overrightarrow{F_{j \rightarrow i}}$$



### 6.4.2. Amortisseur de rotation

Soit un amortisseur de rotation de coefficient d'amortissement  $c$  [N.s/rad].

On considère que le solide  $S_i$  agit sur le solide  $S_j$ , par l'intermédiaire de l'amortisseur, sous la forme d'un couple dont le moment est :

$$\overrightarrow{M_{i \rightarrow j}(P)} = -c \dot{\vec{u}} = -c \left( \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} = -\overrightarrow{M_{j \rightarrow i}(P)}$$

## 6.5. Actions de contact

Si l'on considère les solides comme parfaits les actions de contact sont caractérisées par un glisseur dont la résultante est portée par la normale commune aux surfaces en contact.

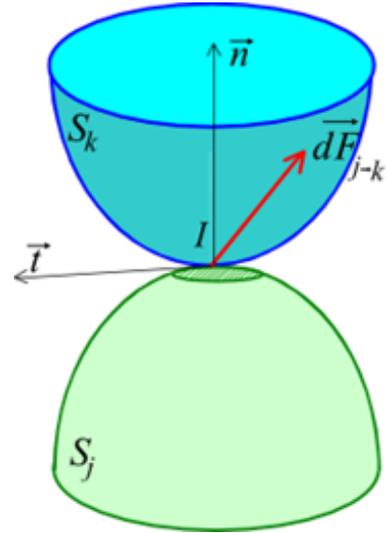
Lors d'un contact ponctuel réel, il se crée localement une zone de déformation. Le contact peut alors transmettre des actions mécaniques dans toutes les directions.

Des lois de comportement ont été développées, à partir d'expériences, pour décrire ces actions. L'expérience montre que le frottement dépend principalement des facteurs suivants :

- nature des corps en contact : matériaux, dureté des surfaces en contact,
- état de surface : rugosité,
- lubrification.

Ces modèles n'ont de validité que tant que :

- la pression entre les solides reste inférieure à la pression maximale admise par ces matériaux,
- la vitesse de glissement reste faible (inférieure à 0.5 m/s),
- la rugosité reste dans des conditions favorables.



### 6.5.1. Loi de Coulomb (frottement sec)

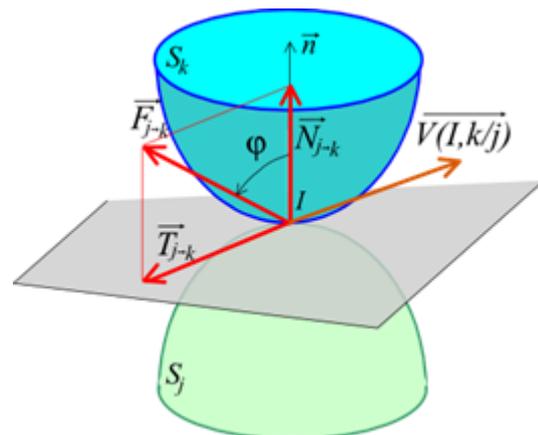
Coulomb a énoncé en 1773 des lois qui portent son nom et qui suffisante pour décrire les phénomènes de friction dans la plupart des cas standards d'utilisation. Il a remarqué que le frottement est indépendant de la vitesse de glissement et de l'étendue des surfaces en contact.

#### Glissement avec frottement

Lorsqu'il y a glissement entre deux solides  $\vec{V}(I,j/i) \neq \vec{0}$ , le frottement génère un effort tangentiel  $\vec{T}_{i \rightarrow j}$  (contenu dans le plan de contact) proportionnel à l'effort normal  $\vec{N}_{i \rightarrow j}$  et opposé à la vitesse de glissement :

$$\vec{T}_{i \rightarrow j} = -\mu \left\| \vec{N}_{i \rightarrow j} \right\| \frac{\vec{V}(I,j/i)}{\left\| \vec{V}(I,j/i) \right\|}$$

$\mu = \tan \phi$  est le coefficient de frottement.

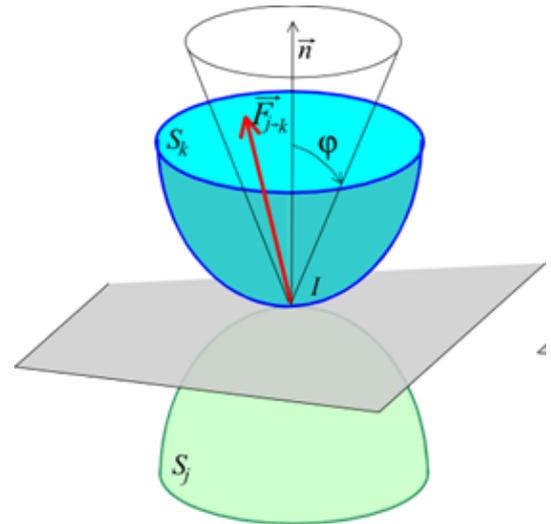


## Adhérence

S'il n'y a pas de mouvement relatif  $\vec{V}(I,j/i) = \vec{0}$ , cela signifie que la valeur de l'effort tangentiel est inférieure à la valeur de l'effort normal multiplié par le coefficient d'adhérence :

$$\left\| \vec{T}_{i \rightarrow j} \right\| < \mu \left\| \vec{N}_{i \rightarrow j} \right\|$$

$\mu = \tan \phi$  est le coefficient d'adhérence,  
 $\phi$  définit un cône autour de la normale.



## Coefficient d'adhérence et coefficient de frottement

Le coefficient de frottement est généralement légèrement inférieur au coefficient d'adhérence. L'écart entre ces deux coefficients étant très faible, on considère souvent une seule et même valeur pour les deux.

### Exemple Exemple d'expérience permettant de déterminer le coefficient d'adhérence

Soit un solide posé sur un plan incliné et soumis uniquement à la pesanteur et à la réaction du contact. Son équilibre statique s'écrit :

$$\vec{R}_{0 \rightarrow 1} + \vec{P}_{pes \rightarrow 1} = \vec{0}$$

En projetant sur la normale, on a :

$$R_n - mg \cos \phi = 0$$

En projetant sur le plan de contact, on a :

$$R_t - mg \sin \phi = 0$$

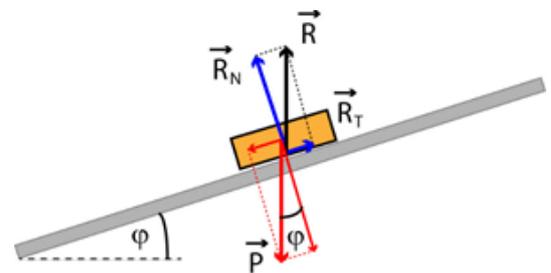
En combinant ces 2 équation, on obtient le rapport :

$$\frac{R_t}{R_n} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi = \mu$$

Expérimentalement, on augmente progressivement l'angle  $\phi$  de la pente. Lorsque le solide commence à glisser, on mesure la valeur de l'angle et on a ainsi une estimation du coefficient d'adhérence pour le couple de matériaux en contact.

Voici quelques valeurs numériques pour les coefficients d'adhérence (glissement) :

Matériaux en contact	coefficient d'adhérence	coefficient de frottement
Acier / acier	0,2	0,1



Acier / acier graissé	0,1	0,05
Acier / bronze	0,2	0,1
Acier / palier PTFE		0,02 à 0,08
Acier / garnitures de freins	0,4	0,25
Pneu / route sèche	0,8	0,5
Pneu / route mouillée	0,5	0,35

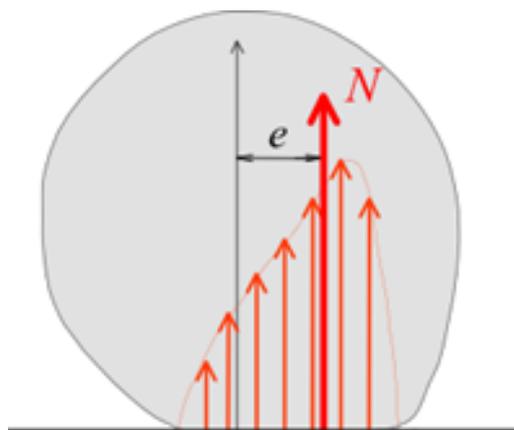
## 6.5.2. Résistance au roulement

S'il y a roulement  $\vec{R}_{j/i}(\mathbf{I}) \neq \vec{0}$  alors un bourrelet se forme en amont de la surface de contact, la résultante des efforts de contact se déplace alors vers « l'avant du mouvement ».

Le moment généré par ce phénomène est proportionnel à l'effort normal et s'oppose au roulement :

$$\vec{M}r_{i \rightarrow j}(\mathbf{I}) = -e \left\| \vec{N}_{i \rightarrow j} \right\| \frac{\vec{R}_{j/i}(\mathbf{I})}{\left\| \vec{R}_{j/i}(\mathbf{I}) \right\|}$$

Où  $e$  est le coefficient de résistance au roulement (en mm).



### Exemple

Acier trempé sur acier trempé  $e=0.0005$  à  $0.001$  mm

Acier doux sur acier doux (E24)  $e=0.5$  mm

Pneu sur sol  $e=5$  à  $20$  mm

S'il n'y a pas roulement  $\vec{R}_{j/i}(\mathbf{I}) = \vec{0}$  alors  $\left\| \vec{M}r_{i \rightarrow j}(\mathbf{I}) \right\| < e \left\| \vec{N}_{i \rightarrow j} \right\|$

## 6.5.3. Résistance au pivotement

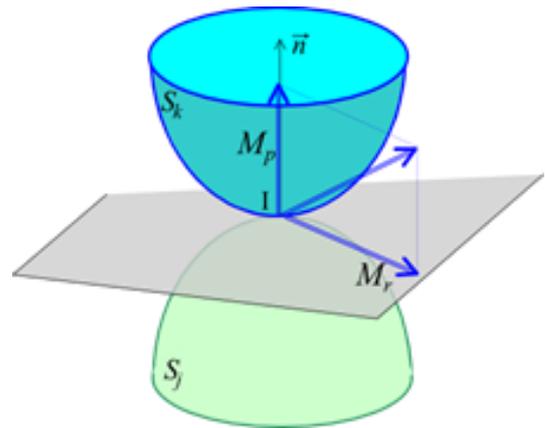
S'il y a pivotement  $\overrightarrow{P_{j/i}(\mathbf{I})} \neq \vec{0}$  alors les efforts de contact génèrent un moment proportionnel à l'effort normal et opposé au pivotement :

$$\overrightarrow{Mp_{i \rightarrow j}(\mathbf{I})} = -k \left\| \overrightarrow{N_{i \rightarrow j}} \right\| \frac{\overrightarrow{P_{j/i}(\mathbf{I})}}{\left\| \overrightarrow{P_{j/i}(\mathbf{I})} \right\|}$$

$k$  est le coefficient de résistance au pivotement.

S'il n'y a pas pivotement  $\overrightarrow{P_{j/i}(\mathbf{I})} = \vec{0}$  alors

$$\left\| \overrightarrow{Mp_{i \rightarrow j}(\mathbf{I})} \right\| < k \left\| \overrightarrow{N_{i \rightarrow j}} \right\|$$



## 6.6. Loi de dérive d'un pneumatique

Soit  $\overrightarrow{x_{roue}}$  l'axe longitudinal (intersection du plan de jante de la roue et du plan du sol) et  $\overrightarrow{y_{roue}}$  l'axe transversal de la roue.

L'angle de dérive est l'angle entre l'axe  $\overrightarrow{x_{roue}}$  de la roue la direction de la vitesse du point de contact I par rapport au sol :

$$\delta = \left( \overrightarrow{x_{roue}}, \overrightarrow{V(\mathbf{I}/sol)} \right) = \arctan \left( \frac{V(\mathbf{I}/sol) \cdot \overrightarrow{y_{roue}}}{V(\mathbf{I}/sol) \cdot \overrightarrow{x_{roue}}} \right)$$

La loi de dérive du pneumatique est  $\overrightarrow{F_{sol \rightarrow roue}} \cdot \overrightarrow{y_{roue}} = -D\delta$

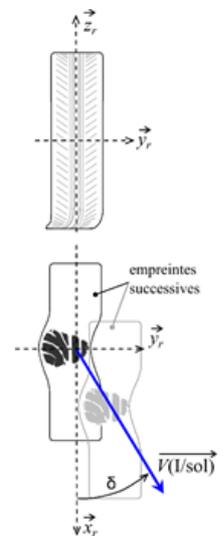
Où  $D$  est le coefficient de dérive issu d'essais sur le pneumatique.

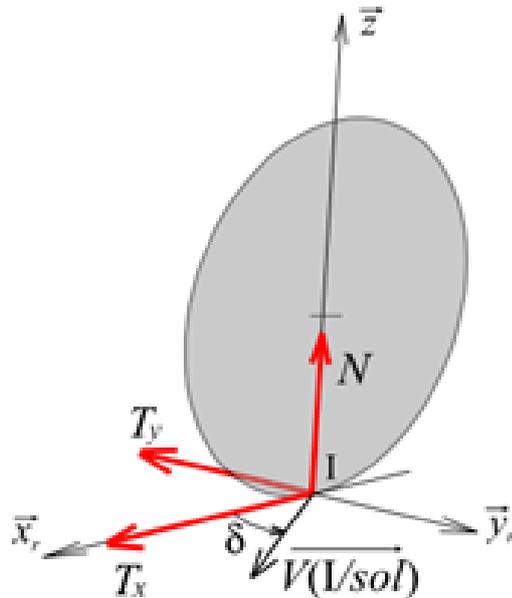
La résultante des actions de contact est de la forme :

$$\overrightarrow{F_{sol \rightarrow roue}} = T_x \overrightarrow{x_{roue}} + T_y \overrightarrow{y_{roue}} + T_z \overrightarrow{z}$$

On considère qu'il y a non glissement  $\overrightarrow{V(\mathbf{I}, roue/sol)} \cdot \overrightarrow{x_{roue}} = 0$  et donc

$$\sqrt{T_x^2 + T_y^2} < \mu N.$$





## 6.7. Loi de comportement aérodynamique

L'action aérodynamique d'un fluide sur un solide peut être représenté par le torseur suivant, exprimé au point O dans le repère  $R_1$  où  $\vec{x}_1$  est l'axe longitudinal et  $\vec{y}_1$  l'axe transverse :

$$\{T_{aero \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{aero \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{aero \rightarrow S}(O)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X L \\ Y M \\ Z N \end{array} \right\}_{O, R_1}$$

où les composantes d'action s'expriment en fonction de coefficients aérodynamique  $C$  adimensionnels :

$$X = -\frac{\rho}{2} C_X S V^2 \text{ force de traînée}$$

$$Y = \frac{\rho}{2} C_Y S V^2 \text{ force latérale ou de portance latérale}$$

$$Z = \frac{\rho}{2} C_Z S V^2 \text{ force de portance}$$

$$L = \frac{\rho}{2} C_L S V^2 \ell \text{ moment de roulis}$$

$$M = \frac{\rho}{2} C_M S V^2 \ell \text{ moment de tangage}$$

$$N = \frac{\rho}{2} C_N S V^2 \ell \text{ moment de lacet}$$

Avec  $\rho$  la masse volumique du fluide (air à 20°C 1,225kg/m<sup>3</sup>),  $S$  la surface de référence,  $\ell$  la longueur de référence et  $V$  le module de la vitesse du véhicule par rapport au fluide.

# Appliquer le PFD - Utilisation de la méthode du système minimum

En fonction de l'objectif visé (connaître le mouvement ou déterminer une action de liaison), il n'est pas nécessaire d'écrire l'ensemble des équations. Si on s'intéresse seulement aux équations de mouvement (système d'équations différentielles permettant après résolution de connaître l'évolution de paramètres cinématiques au cours du temps à partir de conditions initiales) alors on cherchera à ne pas faire apparaître les actions de liaisons inconnues dans les équations.

Le système minimum est constitué du minimum d'équations nécessaires à écrire pour atteindre l'objectif : déterminer les équations régissant le mouvement du mécanisme.

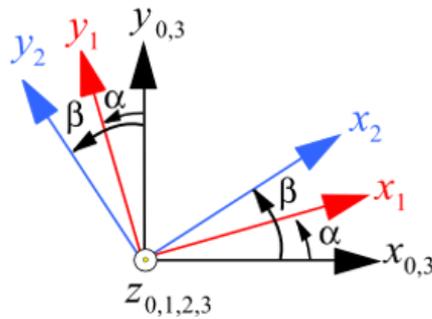
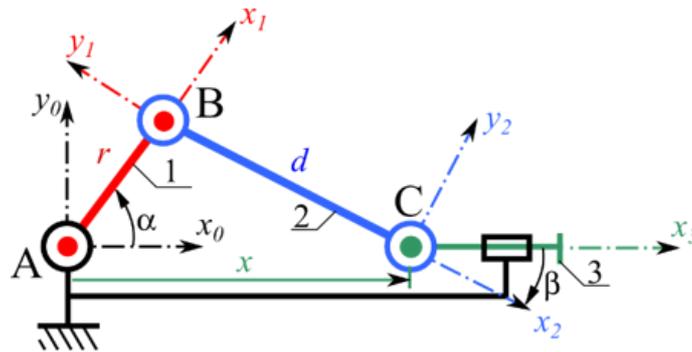
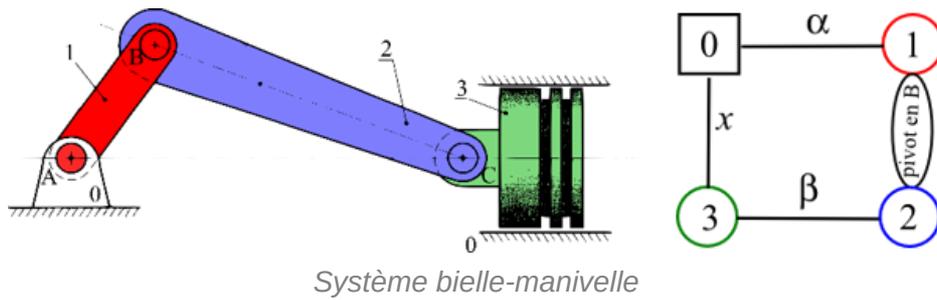
La méthode consiste à choisir les équations des théorèmes généraux ne faisant pas apparaître les actions de liaison. Pour cela, on se servira du graphe de liaison : le principe consiste à isoler successivement différents sous-ensembles du système en ne coupant qu'une liaison paramétrée à la fois. On isolera alors l'ensemble des solides situés après la liaison coupée, autrement dit en bout de chaîne cinématique (du côté où il n'y a pas le bâti). Parmi les 6 équations pouvant être écrites pour chaque isolement, on écrira seulement celles correspondant à une mobilité, ainsi aucune action de liaison n'interviendra dans l'équation.

Les seules actions de liaisons apparaissant dans les équations sont celles des liaisons non paramétrées. Ces actions seront déterminées grâce aux lois de comportement.

On dressera également un tableau bilan des équations et inconnues pour le système minimum :

	Inconnues		Equations	
Cinématique	<u>Paramètres cinématiques</u>	nb	<u>Equations de liaison</u> - géométriques (liaison) - cinématiques (roulement sans glissement)	nb
Dynamique	<u>Actions de liaison des liaisons non paramétrées</u>	nb	<u>Théorèmes généraux (PFD)</u> - théorème de la résultante dynamique pour chaque mobilité de translation dans la direction de la translation - théorème du moment dynamique pour chaque mobilité de rotation en un point de l'axe de la liaison et suivant la direction de l'axe de rotation <u>Lois de comportement</u> (contact frottant, résistance au roulement, dérive, ...)	nb

**Exemple**



Equations remplaçant la liaison pivot en C :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_{(1)}B_{(2)}} &= \vec{0} \\ &= \overrightarrow{B_{(1)}A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB_{(2)}} \\ &= -r\vec{x}_1 + x\vec{x}_0 - d\vec{x}_2 \\ \overrightarrow{B_{(1)}B_{(2)}} \cdot \vec{x}_0 &= x - r \cos \alpha - d \cos \beta = 0 \\ \overrightarrow{B_{(1)}B_{(2)}} \cdot \vec{y}_0 &= -r \sin \alpha - d \sin \beta = 0 \end{aligned}$$

	Inconnues	13	Equations	13
Cin.	$x, \alpha, \beta$	3	<u>Equations de liaison</u>	2
Dynamique	- pivot 0/1 : $X_{01}, Y_{01}$	2	<u>Théorèmes généraux (PFD)</u>	9
	- pivot 1/2 : $X_{12}, Y_{12}$	2	- 3 solides * 3 équations	
	- pivot 2/3 : $X_{23}, Y_{23}$	2	<u>Lois de comportement</u>	
	- glissière 3/0 : $Y_{30}, Mz_{30}$	2	- effort sur piston considéré donné	1
	- effort sur piston : F	1	- vitesse de rotation constante	1
	- Couple résistant : Cr	1	$\dot{\alpha} = \omega = cte$	

Bilan complet

	Inconnues	7	Equations	7
Cin.	$x, \alpha, \beta$	3	<u>Equations de liaison</u>	2
Dynamique	- pivot 1/2 : $X_{12}, Y_{12}$ - effort sur piston : F - Couple résistant : Cr	2	<u>Théorèmes généraux (PFD)</u>	
		1	- TMD appliqué à 1 en $A \vec{z}$	1
		1	- TMD appliqué à 2 en $C \vec{z}$	1
			- TRD appliqué à {2U3} sur $\overline{x_{0,3}}$	1
			<u>Lois de comportement</u>	
	- effort sur piston considéré donné		1	
	- $\dot{\alpha} = \omega = cte$		1	

Bilan du système minimum

### Mise en équation

TRD appliqué à {2U3} sur  $\overline{x_{0,3}}$

$$\overline{D_{3/0}} = m_3 \overline{\Gamma(G_3/0)} = m_3 \ddot{x}_{0,3}$$

$$\overline{V(G_2/0)} = \overline{V(C,2/0)} + \overline{G_2 C} \wedge \overline{\Omega_{2/0}} = \dot{x} \vec{x}_3 + d/2 \vec{x}_2 \wedge \dot{\beta} \vec{z} = \dot{x} \vec{x}_3 - \frac{d\dot{\beta}}{2} \vec{y}_2$$

$$\overline{\Gamma(G_2/0)} = \left. \frac{dV(G_2/0)}{dt} \right|_0 = \ddot{x} \vec{x}_3 - \frac{d\ddot{\beta}}{2} \vec{y}_2 + \dot{\beta} \vec{z} \wedge -\frac{d\dot{\beta}}{2} \vec{y}_2 = \ddot{x} \vec{x}_3 - \frac{d\ddot{\beta}}{2} \vec{y}_2 + \frac{d\dot{\beta}^2}{2} \vec{x}_2$$

$$\overline{D_{2/0}} = m_2 \overline{\Gamma(G_2/0)} = m_2 \left( \ddot{x} \vec{x}_3 - \frac{d\ddot{\beta}}{2} \vec{y}_2 + \frac{d\dot{\beta}^2}{2} \vec{x}_2 \right)$$

$$\overline{\delta(A,1/0)} = \frac{d}{dt} \left( \overline{\sigma(A,1/0)} \right)_0 = \frac{d}{dt} \left( \overline{I_{A,1} \Omega_{1/0}} \right)_0 = C_1 \ddot{\alpha} \vec{z}$$

$$\overline{\delta(G_2,2/0)} = \frac{d}{dt} \left( \overline{\sigma(G_2,2/0)} \right)_0 = \frac{d}{dt} \left( \overline{I_{G_2,2} \Omega_{2/0}} \right)_0 = C_2 \ddot{\beta} \vec{z}$$

$$\begin{aligned} \overline{\delta(C,2/0)} &= \overline{\delta(G_2,2/0)} + \overline{CG_2} \wedge m_2 \overline{\Gamma(G_2/0)} \\ &= C_2 \ddot{\beta} \vec{z} - d/2 \vec{x}_2 \wedge m_2 \begin{pmatrix} \ddot{x} \cos \beta + d\dot{\beta}^2/2 \\ -\ddot{x} \sin \beta - d\ddot{\beta}/2 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \\ &= \left( C_2 \ddot{\beta} + m_2 \left( \ddot{x} \sin \beta d/2 + d^2 \ddot{\beta}/4 \right) \right) \vec{z} \end{aligned}$$

$$\overline{R_{1 \rightarrow 2}} = X_{12} \vec{x}_0 + Y_{12} \vec{y}_0$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{1 \rightarrow 2}(A)} &= \overrightarrow{M_{1 \rightarrow 2}(B)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ &= \vec{0} + \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_0 \wedge \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ 0 \end{pmatrix}_0 \\ &= (Y_{12}r \cos \alpha - X_{12}r \sin \alpha) \vec{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{1 \rightarrow 2}(C)} &= \overrightarrow{M_{1 \rightarrow 2}(B)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ &= \vec{0} + \begin{pmatrix} -d \cos \beta \\ -d \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}_0 \wedge \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ 0 \end{pmatrix}_0 \\ &= (-d \cos \beta Y_{12} + d \sin \beta X_{12}) \vec{z} \end{aligned}$$

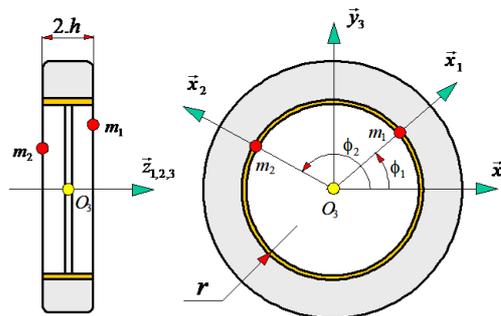
### Bilan

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BB} \cdot \vec{x}_0 = 0 \\ \overrightarrow{BB} \cdot \vec{y}_0 = 0 \\ \left( \overrightarrow{D_{2/0}} + \overrightarrow{D_{3/0}} \right) \cdot \vec{x}_0 = \left( \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{gaz \rightarrow 3}} \right) \cdot \vec{x}_0 \\ \delta(A, 1/0) \cdot \vec{z} = \left( \overrightarrow{M_{2 \rightarrow 1}(A)} + \overrightarrow{M_{r \rightarrow 1}(A)} \right) \cdot \vec{z} \\ \delta(C, 2/0) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{M_{1 \rightarrow 2}(C)} \cdot \vec{z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \alpha + d \cos \beta \\ -r \sin \alpha = d \sin \beta \\ (m_3 + m_2)\ddot{x} + m_2(\dot{\beta}^2 \cos \beta + \ddot{\beta} \sin \beta) d/2 = X \\ C_1 \ddot{\alpha} = C_r - (Y_{12}r \cos \alpha - X_{12}r \sin \alpha) \\ C_2 \ddot{\beta} + m_2(\ddot{x} \sin \beta d/2 + d^2 \ddot{\beta}/4) = -d \cos \beta Y_1 \end{array} \right.$$

# 8. Exercices de dynamique

## 8.1. Exercice : Equilibrage

La figure ci-dessous représente une roue de véhicule automobile  $S_3$  sur laquelle ont été positionnées deux masses d'équilibrage  $m_1$  et  $m_2$ . Ces masses d'équilibrage sont localisées sur la jante (rayon  $r$ ) sur sa partie avant (masse  $m_1$ ) et arrière (masse  $m_2$ ) par les angles  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .



### Géométrie des masses

- **masse  $m_1$**  : masse ponctuelle telle que  $\overrightarrow{O_3G_1} = (r, 0, h)_1$
- **masse  $m_2$**  : masse ponctuelle telle que  $\overrightarrow{O_3G_2} = (r, 0, -h)_2$
- **roue  $S_3$  non équilibrée** : masse  $m_3$ , centre de masse  $G_3$  tel que  $\overrightarrow{O_3G_3} = (a, b, c)_3$  et matrice d'inertie en  $O_3$  :

$$\overline{\overline{I}}(O_3, S_3) = \begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{bmatrix}_3$$

### Question 1

Donner les équations traduisant la condition « d'équilibrage statique » de la roue.

### Indice :

Le centre de masse  $G'_3$  de l'ensemble  $S'_3 = \{S_3 + m_1 + m_2\}$  est sur l'axe  $(O_3, \vec{z}_3)$ .

## Question 2

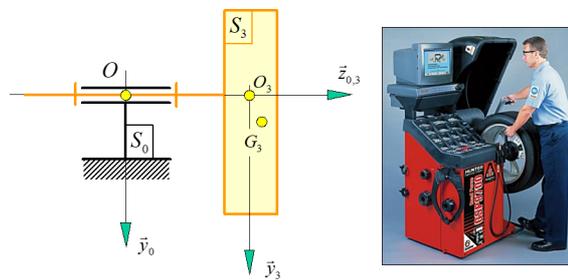
Donner les équations traduisant la condition « d'équilibrage dynamique » de la roue.

### Indice :

La direction  $(O_3, \vec{z}_3)$  est direction principale d'inertie de l'ensemble  $S'_3 = \{S_3+m_1+m_2\}$ .

## 8.2. Exercice : Analyse du fonctionnement de l'équilibreuse

Le schéma ci-dessous représente le montage d'une roue  $S_3$  sur une équilibreuse  $S_0$



La roue  $S_3$  est en liaison pivot d'axe  $(O_3, \vec{z}_{0,3})$  avec l'équilibreuse  $S_0$ , paramétrée  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ .

La roue  $S_3$  est de masse  $m_3$ , de centre de masse  $G_3$  tel que  $\vec{O_3G_3} = b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3$  et de matrice d'inertie en  $O_3$  :

$$\vec{I}(O_3, S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_3$$

Un moteur, non représenté, exerce sur  $S_3$  un torseur couple  $C_m \vec{z}_{0,3}$  tel que  $\dot{\theta} = \omega = cste$ .

## Question

Déterminer et tracer les graphes d'évolution des actions mécaniques développées par la liaison 0/3.

Déterminer l'évolution de ces efforts lorsque la roue est équilibrée.

### Indice :

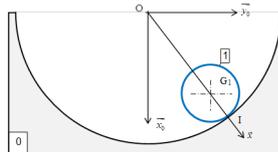
Pour simplifier les calculs on déterminera les éléments de réduction de ce torseur en  $O_3$ .

## 8.3. Exercice : Oscillation d'un cylindre sur un chemin circulaire

Un cylindre  $S_1$  de révolution, plein homogène de rayon  $r$  et de masse  $m$ , peut rouler sans glisser dans un cylindre  $S_0$ , creux de rayon  $R$ . Les axes des deux cylindres sont horizontaux et parallèles.

Le mouvement de  $S_1/S_0$  est défini par :

- $\phi = (\vec{x}_0, \vec{x})$  paramétrant l'orientation du vecteur  $\overrightarrow{OG_1}$  par rapport à  $\vec{x}_0$
- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  paramétrant la rotation propre de  $S_1$  par rapport à  $S_0$



### Question 1

Ecrire l'équation traduisant le non-glissement entre  $S_1$  et  $S_0$  en I.

### Question 2

Effectuer la mise en équations permettant d'étudier le mouvement de  $S_1/S_0$ .

### Question 3

Déterminer le coefficient de frottement minimal pour que l'hypothèse de non glissement soit vérifiée, dans le cas où le cylindre  $S_1$  est lâché d'une position initiale  $\phi(t=0) = \phi_0$  avec une vitesse nulle  $\dot{\phi}(t=0) = 0$ .

### Question 4

Etudier les petits mouvements  $\bar{\phi}$  du cylindre autour de la position d'équilibre  $\phi_e = 0$ , pour les conditions initiales  $\phi(t=0) = \phi_0$ ,  $\dot{\phi}(t=0) = 0$ .

### Question 5

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au solide 1.

## 8.4. Exercice : Pendule d'Euler

Le système est constitué :

- d'un chariot (1) en liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$ , avec le bâti (0), de paramètre de translation  $x = \overrightarrow{OG_1} \cdot \vec{x}_0$
- d'un pendule (2) en liaison pivot d'axe  $(G_1, \vec{y}_1)$  avec le chariot (1), de paramètre de rotation  $\theta = (\vec{z}_{1,0}, \vec{z}_2)$

Le référentiel lié au bâti (0) est galiléen et  $\vec{z}_0$  est verticale descendante.

Le chariot (1) a une masse  $M$  et un moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(G_1, \vec{y}_0)$ .

Le pendule (2) a une masse  $m$  et un moment d'inertie  $I_2$  par rapport à l'axe  $(G_2, \vec{y}_0)$ .

Le chariot (1) est relié au bâti (0) par un ressort de raideur  $k$  dont l'action s'annule pour  $x = 0$ .

### Question 1

Ecrire les équations du mouvement, à partir des théorèmes généraux.

### Question 2

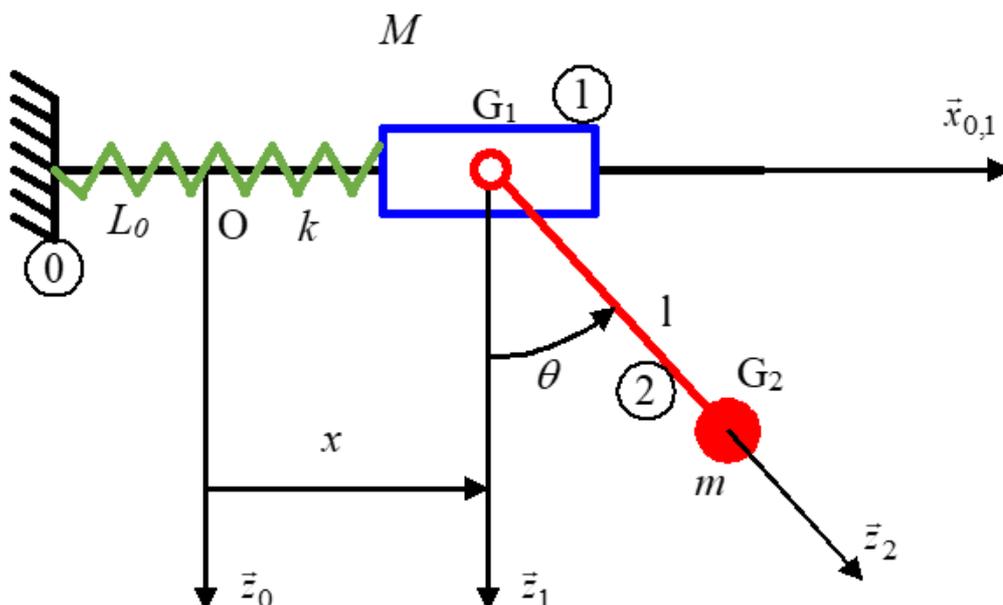
Linéariser les équations dans le cas où  $x$  et  $\theta$  sont petits.

### Question 3

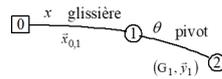
Résoudre le système différentiel dans le cas où  $\frac{k}{M+m} = \frac{g}{l}$ ,  $M = 3m$  et  $I_2 \ll ml^2$

- En cherchant directement la solution,
- En utilisant les paramètres normaux.

On considère les conditions initiales suivantes à  $t = 0$ ,  $\begin{cases} x = 0, \dot{x} = 0 \\ \theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0 \end{cases}$



## Éléments de correction



**Tableau bilan inconnues/équations complet :** (le problème est considéré plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ )

	Inconnues	8	Equations	8
Cinématique	$x, q$	2		0
Dynamique	1 glissière	2	<b>Théorèmes généraux</b>	6
	1 pivot	2	2 solides * 3	
	Ressort	1	<b>Lois de comportement</b>	1
	amortisseur	1	ressort amortisseur	1

Remarque : Le problème est donc isostatique et le degré de liberté est égal à 2.

On définit les torseurs des liaisons comme suit :

$$\text{Glissière } 01 \text{ de direction } \vec{x}_0 \{T_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{01} = 0 \\ Y_{01} = 0 & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} = 0 \end{array} \right\}_{G_1, R_1}$$

$$\text{pivot } 12 \text{ d'axe } (G_1, \vec{y}_1) \{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} = 0 \\ Y_{12} = 0 & 0 \\ Z_{12} & N_{12} = 0 \end{array} \right\}_{G_1, R_1}$$

L'application des théorèmes généraux à chacun des deux solides et les lois de comportement pour le ressort et l'amortisseur nous permettent d'écrire les 8 équations dynamiques suivantes :

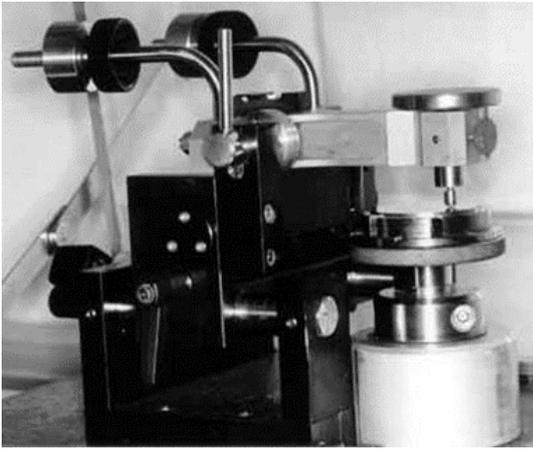
$$\text{PFD au point } G_1 \text{ pour le pendule : } \left\{ \begin{array}{l} m(\ddot{x} + l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta) = X_{12} \\ -m(l\ddot{\theta} \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta) = Z_{12} + mg \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta = -mgl \sin \theta \end{array} \right.$$

$$\text{PFD au point } G_1 \text{ pour le chariot : } \left\{ \begin{array}{l} M\ddot{x} = F_{R1} + F_{A1} + X_{21} \\ 0 = Z_{01} + Z_{21} + Mg \\ 0 = M_{01} \end{array} \right.$$

Pour le ressort :  $F_{R1} = -kx$

Pour l'amortisseur :  $F_{A1} = -b\dot{x}$

## 8.5. Exercice : Etude d'un tribomètre



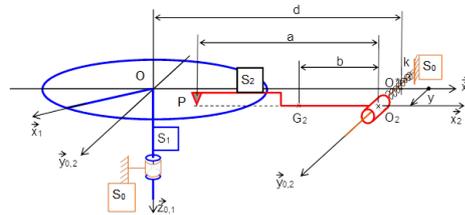
Un tribomètre est appareil permettant de mesurer le coefficient de frottement entre deux solides. On peut parfois visualiser ce qui se passe à « l'intérieur » du contact.

Ici, l'étude se fera sur un tribomètre pion – disque (exemple sur photo ci-contre). Grâce à la mesure du déplacement du bras ( $S_2$  sur le schéma) lorsque le disque tourne à vitesse constante, on peut connaître le coefficient de frottement de glissement ( $f$ ) entre le pion ( $P_2$ ) et le disque ( $S_1$  sur le schéma).

Le système est constitué d'un bâti  $S_0$ , référentiel galiléen avec  $\vec{z}_0$  la verticale descendante, et de 2 solides :

- $S_1$ , Disque + arbre, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_{0,1})$  avec  $S_0$  et paramétrée  $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
- $S_2$ , Pion + bras, en liaison pivot glissant d'axe  $(O^*, \vec{y}_{0,2})$  avec  $S_0$ , de paramètre de rotation  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$  et de translation  $y = \vec{O^*O}_2 \cdot \vec{y}_0$ .

Le contact ponctuel entre  $S_1$  et  $S_2$  se fait au point P du plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  avec  $\vec{O}_2\vec{P} = -a \vec{x}_2$ . Cette liaison n'est pas parfaite car on y considère du frottement.



Un ressort de raideur  $k$  est monté entre  $S_2$  et  $S_0$  de sorte que son action soit nulle pour  $y = 0$ .

Un couple moteur ( $C_m$ ) s'exerce sur l'arbre du solide  $S_1$  pour maintenir la vitesse de rotation de  $S_1$  par rapport à  $S_0$  constante ( $\dot{\psi} = \omega = cste$ ).

Données inertielles du solide  $S_1$  : masse  $m_1$ , centre d'inertie  $G_1 \in (O, \vec{z}_{1,0})$ , moment d'inertie  $C_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_{1,0})$ .

Données inertielles du solide  $S_2$  : masse  $m_2$ , centre d'inertie  $G_2$  avec  $\vec{O}_2\vec{G}_2 = -b \vec{x}_2$ , moment d'inertie  $A_2$  par rapport à  $(G_2, \vec{y}_{0,2})$ .

## Question 1

Etablir le graphe des liaisons, les figures de changement de base, et la ou les équations de liaison.

## Question 2

Effectuer le bilan complet (équations, inconnues), puis simplifié en vue d'obtenir les équations de mouvement.

## Question 3

Déterminer les équations de mouvement 'du bras' et 'du disque'. (Équation de mouvement : équation ne faisant pas intervenir les inconnues de liaison).

## Question 4

Pour un fonctionnement en régime stationnaire  $\dot{\psi} = \omega = cte$  et  $y = y^* = cte$ , déterminer le coefficient de frottement  $f$  en fonction de  $y^*$ , et le couple moteur nécessaire ( $Cm$ ) :

1. par les théorèmes généraux,
2. par le théorème de l'énergie cinétique.

## 8.6. Exercice : Stabilisateur gyroscopique

Pour comprendre le fonctionnement d'un stabilisateur de roulis, on réalise le système expérimental représenté sur la figure 1 :

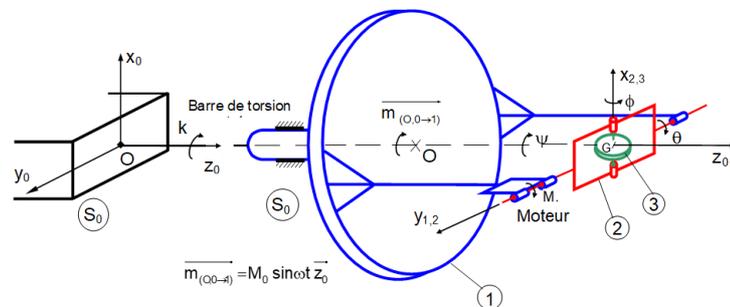


Figure 1

$S_1$  est un corps en rotation autour d'un axe horizontal  $(O, \vec{z}_{0,1})$  par rapport au référentiel  $S_0$ .

Une barre de torsion équivalente à un ressort spiral est montée entre  $S_0$  et  $S_1$ .

$S_2$  est un cadre en liaison pivot d'axe  $(G, \vec{y}_{1,2})$  avec le solide  $S_1$ . Un moteur  $M_1$  est monté entre  $S_1$  et  $S_2$ , son stator est relié à  $S_1$  et son rotor à  $S_2$ .

$S_3$  est un volant d'inertie en liaison pivot d'axe en liaison pivot d'axe  $(G, \vec{x}_{2,3})$  avec le cadre  $S_2$ . Un moteur  $M_2$  est monté entre  $S_2$  et  $S_3$ .

## Paramétrage

---

- Un repère  $R_0 : (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti  $S_0$ , avec  $\vec{x}_0$  la direction verticale ascendante
- Un repère  $R_1 : (G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à  $S_1$  avec  $G \in (O, \vec{z}_0)$
- Le paramètre du mouvement 1/0 est :  $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
- Un repère  $R_2 : (G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié à  $S_2$
- Le paramètre du mouvement 2/1 est :  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$
- Un repère  $R_3 : (G, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est lié à  $S_3$
- Le paramètre du mouvement 3/2 est :  $\phi = (\vec{y}_2, \vec{y}_3), \vec{y}_3$  arbitraire

## Données

---

- Inertielles :
  - Le moment d'inertie de  $S_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  est  $I$ . Son centre d'inertie est sur l'axe  $(O, \vec{z}_{0,1})$
  - La masse de  $S_2$  et les éléments du tenseur en  $G$  sont négligeables

- Le tenseur d'inertie de  $S_3$  est  $\overline{\overline{I}}_{G,3} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}_{3,2}$ . Son centre d'inertie est  $G$

- La raideur de la barre de torsion entre  $S_0$  et  $S_1$  est notée  $k$
- Un dispositif non représenté exerce entre  $(S_0)$  et  $(S_1)$  une action mécanique telle que :

$$\{\overrightarrow{F}_{M_0 \rightarrow 1} = \vec{0} ; \overrightarrow{M}_{M_0 \rightarrow 1}(G) = M_0 \sin \omega t \vec{z}_0\}$$

- Le moteur  $M_1$  monté entre  $(S_1)$  et  $(S_2)$  exerce une action telle que :

$$\{\overrightarrow{F}_{M_1 \rightarrow 2} = \vec{0} ; \overrightarrow{M}_{M_1 \rightarrow 2}(G) = C_{m1} \vec{y}_{1,2}\}$$

- Le moteur  $M_2$  installé entre  $S_2$  et  $S_3$ , entraîne le volant à vitesse constante  $\dot{\phi} = n = cte$  en exerçant une action telle que :

$$\{\overrightarrow{F}_{M_2 \rightarrow 3} = \vec{0} ; \overrightarrow{M}_{M_2 \rightarrow 3}(G) = C_{m2} \vec{x}_{2,3}\}$$

## Hypothèses

---

1.  $R_0 : (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen,  $\vec{x}_0$  verticale ascendante
2. Les liaisons sont supposées parfaites

## Question 1

---

Ecrire les équations qui régissent le mouvement de  $S_1$  et  $S_2$ .

On suppose, dans tout ce qui suit, que les angles  $\psi$  et  $\theta$ , ainsi que leur dérivée demeurent petits et que  $|n| \gg |\dot{\psi}|$  et  $|n| \gg |\dot{\theta}|$

## Question 2

---

Linéariser les équations dans l'état stationnaire  $\psi = 0, \theta = 0$  et  $\dot{\phi} = \eta = Cste$ .

On suppose que le moteur  $M_1$  fournit un couple permettant d'asservir sa vitesse de rotation de sorte que  $\dot{\theta} = -p \dot{\psi}$ . Le sens de rotation est choisi de manière que :  $p n > 0$ .

## Question 3

---

Montrer que le mouvement de  $S_1$  est régi par une équation de la forme :

$$\ddot{\psi} + 2\varepsilon\omega_0 \dot{\psi} + \omega_0^2 \psi = \frac{M_0}{(I+B_3)} \sin \omega t \text{ en identifiant } \omega_0 \text{ la pulsation propre et } \varepsilon \text{ l'amortissement.}$$

## Question 4

---

Expliquer l'intérêt du gyroscope stabilisateur dans la réduction des oscillations.

## Question 5

---

A quelle condition le stabilisateur gyroscopique est-il efficace pour toutes les valeurs de  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_0}$  ?