

CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

Date : 19/12/222

Licence :

Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage des Conditions Initiales à l'Identique :
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/fr/>

auteur·e(s) : Sébastien Morterolle, INSA de Lyon

Table des matières

Objectifs	4
Introduction	5
1. Paramétrage d'un mouvement.....	6
1.1. Repérage d'un point	6
1.2. Repérage d'un solide	7
1.3. Changement de base	8
1.3.1. Changement de base - Matrice de passage	8
1.3.2. Exemple dans un plan de normale	9
1.3.3. Exemple de changement de base du cas des angles d'Euler (de type 1)	9
1.4. Paramétrage de la position et de l'orientation d'un repère par rapport à un autre	11
2. Vitesses d'un solide	12
2.1. Vitesse instantanée d'un point	12
2.2. Dérivation d'un vecteur exprimé dans une base mobile par rapport à la base de dérivation	12
2.3. Vitesse instantanée de rotation	14
2.4. Champ des vitesses d'un solide	16
2.5. Equiprojectivité	17
3. Torseur cinématique et mouvements	18
3.1. Torseur distributeur des vitesses	18
3.2. Cinématique de translation	18
3.3. Cinématique de rotation	19
3.4. Cinématique d'un mouvement quelconque	19
3.5. Composition des mouvements et des vitesses	20
4. Cinématique du contact	23
4.1. Définitions	23
4.2. Roulement et pivotement	23
4.3. Vitesse de glissement	24
4.4. Relation de non glissement	24
5. Accélération d'un solide	26
5.1. Accélération d'un point	26
5.2. Champs des accélérations	26
5.3. Composition des accélérations	27
6. Cinématique graphique.....	29
6.1. Mouvements plans	29
6.2. Positionnement du centre instantané de rotation (CIR)	29
7. Cas d'application : étude cinématique d'un différentiel d'automobile.....	32
7.1. Paramétrage et figures de changement de base	33
7.2. Calcul des vitesses de glissement au point I	33
7.3. Calcul des Vitesses de glissement au point J	34

7.4. Calcul des Vitesses de glissement au point K	35
7.5. Cas particuliers de fonctionnement	35
8. Exercices de cinématique	37
8.1. Exercice : Joint de Cardan	37
8.2. Exercice : Pompe à barillet mobile	38
8.3. Exercice : Mécanisme planétaire à coulisse	39

Objectifs

Objectif 1 : savoir paramétrer les mouvements d'un mécanisme

Objectif 2 : savoir identifier une chaîne cinématique fermée et écrire les équations géométriques liant les paramètres de cette boucle

Objectif 3 : savoir exprimer la vitesse d'un point dans un mouvement en fonction des paramètres cinématiques

Objectif 4 : savoir exprimer la vitesse de rotation d'un mouvement en fonction des paramètres cinématiques

Objectif 5 : savoir exprimer l'accélération d'un point dans un mouvement en fonction des paramètres cinématiques

Introduction

La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment de leurs causes.

1. Paramétrage d'un mouvement

1.1. Repérage d'un point

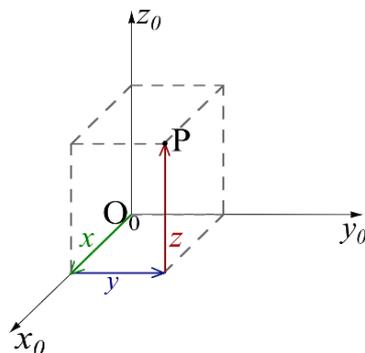
Trois coordonnées sont nécessaires pour positionner un point dans l'espace.

Un repère est défini par une origine et une base.

Dans le cadre du cours, des repères cartésiens (orthonormés directs) seront utilisés.

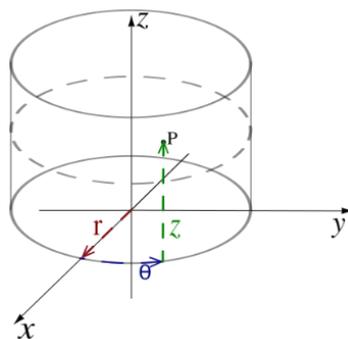
La position du point P dans le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est donnée par le vecteur :

$$\vec{O_0P} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$$

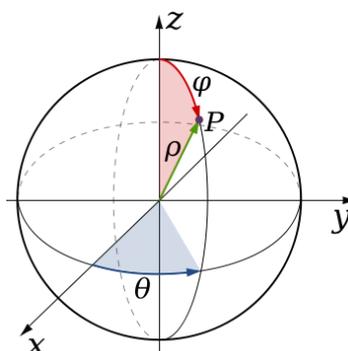


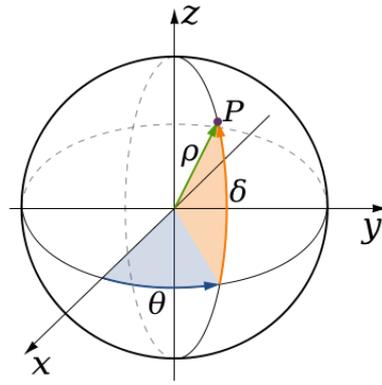
D'autres systèmes de coordonnées existent :

Coordonnées cylindriques



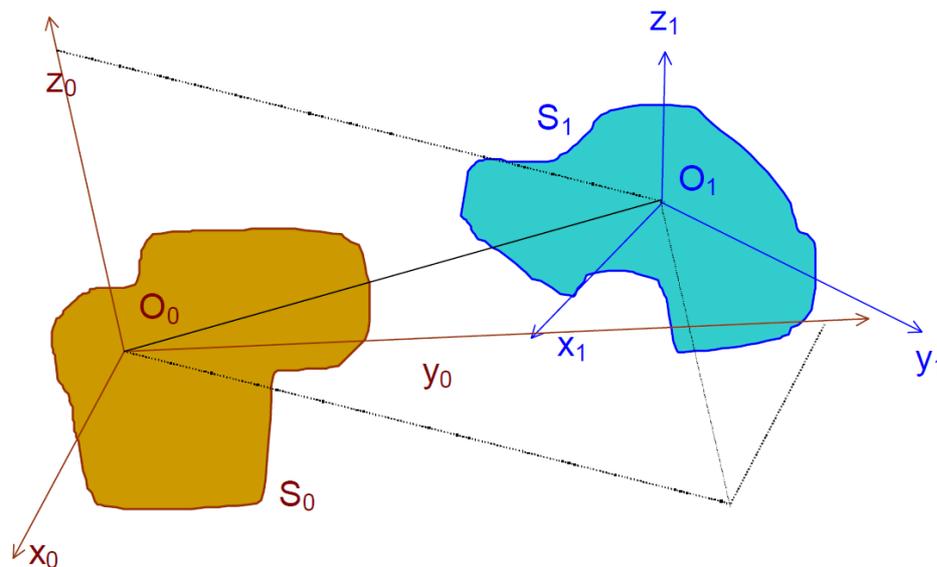
Coordonnées sphériques





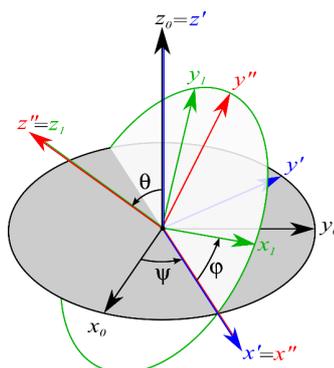
1.2. Repérage d'un solide

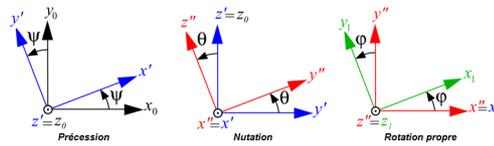
Six coordonnées (ou paramètres) sont nécessaires pour repérer un solide dans l'espace : trois pour la position (comme pour un point) et trois pour l'orientation (ou rotation).



Si le mouvement s'effectue dans un plan, 3 paramètres suffisent pour repérer un solide dans le plan : deux pour la position et un pour l'orientation autour de l'axe perpendiculaire au plan.

On utilise généralement le paramétrage d'Euler (de type 1) pour définir les rotations. On définit pour cela deux repères intermédiaires entre le repère du solide $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et le repère de référence $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.





1.3. Changement de base

1.3.1. Changement de base - Matrice de passage

On effectue « un changement de base » pour exprimer une matrice ou un vecteur exprimé dans une base, par exemple j, dans une nouvelle base par exemple i.

Dans un cas général à 3 dimensions, un vecteur qui n'a qu'une composante dans la base j aura 3 composantes dans la base i. Ces trois composantes sont les projections du vecteur sur les 3 axes de la base orthonormée directe (la projection du vecteur sur une direction se traduit mathématiquement par un produit scalaire du vecteur avec le vecteur unitaire directeur de la direction).

$$\vec{x}_j = (\vec{x}_j \cdot \vec{x}_i) \vec{x}_i + (\vec{x}_j \cdot \vec{y}_i) \vec{y}_i + (\vec{x}_j \cdot \vec{z}_i) \vec{z}_i = a_{11} \vec{x}_i + a_{12} \vec{y}_i + a_{13} \vec{z}_i$$

$$\vec{y}_j = (\vec{y}_j \cdot \vec{x}_i) \vec{x}_i + (\vec{y}_j \cdot \vec{y}_i) \vec{y}_i + (\vec{y}_j \cdot \vec{z}_i) \vec{z}_i = a_{21} \vec{x}_i + a_{22} \vec{y}_i + a_{23} \vec{z}_i$$

$$\vec{z}_j = (\vec{z}_j \cdot \vec{x}_i) \vec{x}_i + (\vec{z}_j \cdot \vec{y}_i) \vec{y}_i + (\vec{z}_j \cdot \vec{z}_i) \vec{z}_i = a_{31} \vec{x}_i + a_{32} \vec{y}_i + a_{33} \vec{z}_i$$

La matrice de passage (ou matrice de changement de base) de la base orthonormée directe j vers la base orthonormée directe i est composée colonne par colonne des composantes des trois vecteurs unitaires de la bases j exprimés dans la base i.

$$\text{Matrice de passage de j vers i : } P_j^i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{Exemple de passage du vecteur } \vec{x}_j \text{ dans la base i : } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_j} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}_{R_i}$$

La base R_j est orthonormée directe, les vecteurs qui la composent sont donc :

$$\vec{x}_j^2 = 1 \Rightarrow a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$$

$$\text{unitaires : } \vec{y}_j^2 = 1 \Rightarrow a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1$$

$$\vec{z}_j^2 = 1 \Rightarrow a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$$

$$\vec{x}_j \cdot \vec{y}_j = 0 \Rightarrow a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0$$

$$\text{et orthogonaux deux à deux : } \vec{y}_j \cdot \vec{z}_j = 0 \Rightarrow a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$

$$\vec{z}_j \cdot \vec{x}_j = 0 \Rightarrow a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0$$

Les coefficients de la matrice de passage sont donc liés par 6 équations. On en déduit que seul trois grandeurs sont nécessaires pour définir l'orientation d'un repère R_j par rapport à un autre R_i .

1.3.2. Exemple dans un plan de normale

Exemple dans un plan de normale \vec{z}

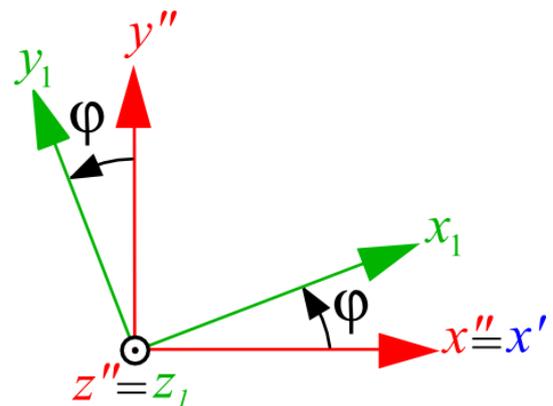
$$\vec{x}_j = (\vec{x}_j \cdot \vec{x}_i) \vec{x}_i + (\vec{x}_j \cdot \vec{y}_i) \vec{y}_i = \cos \alpha \vec{x}_i + \cos(\pi/2 - \alpha) \vec{y}_i = \cos \alpha \vec{x}_i + \sin \alpha \vec{y}_i$$

$$\vec{y}_j = (\vec{y}_j \cdot \vec{x}_i) \vec{x}_i + (\vec{y}_j \cdot \vec{y}_i) \vec{y}_i = \cos(\pi/2 + \alpha) \vec{x}_i + \cos \alpha \vec{y}_i = -\sin \alpha \vec{x}_i + \cos \alpha \vec{y}_i$$

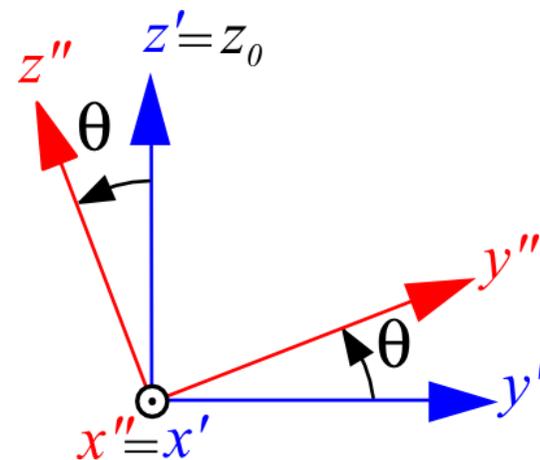
1.3.3. Exemple de changement de base du cas des angles d'Euler (de type 1)

Soit un vecteur $\vec{V} = v_{xj} \vec{x}_j + v_{yj} \vec{y}_j + v_{zj} \vec{z}_j$

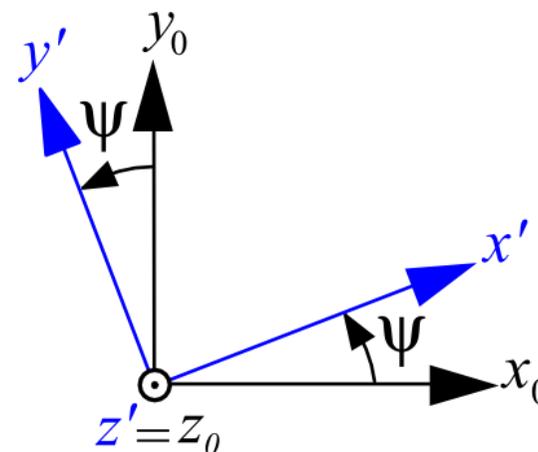
$$\begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix}_{R_i} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{pmatrix}_{R'}$$



$$\begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix}_{R_i} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{xj} \\ v_{yj} \\ v_{zj} \end{pmatrix}_{R_j}$$



$$\begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix}_{R_i} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi & \cos \psi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{xj} \\ v_{yj} \\ v_{zj} \end{pmatrix}_{R_j}$$



$$\begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix}_{R_i} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{xj} \\ v_{yj} \\ v_{zj} \end{pmatrix}_{R_j}$$

1.4. Paramétrage de la position et de l'orientation d'un repère par rapport à un autre

On appelle « paramètres » d'un système les n variables qui permettent d'obtenir les coordonnées de tous les points de ce système.

Chaque solide est généralement repéré par rapport au précédent dans la chaîne cinématique (paramétrage relatif). Il y a alors autant de paramètres cinématiques que de degrés de mobilité dans la liaison entre les deux solides.

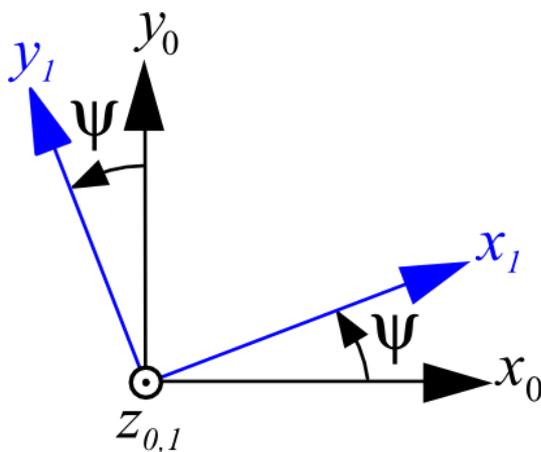
Cependant, on repère parfois un solide par rapport au solide de référence (paramétrage absolu) pour des raisons liées aux objectifs visés (exemple : paramétrage du châssis d'un véhicule par rapport au sol).

Le choix du paramétrage n'est pas unique et peut avoir une influence importante sur le temps de résolution d'un problème.

Pour paramétrer un système, on attache un ou plusieurs repères (base + origine) orthonormés directs à chacun des solides. On isole pour cela le solide du mécanisme, on identifie ses directions privilégiées (axes de ces liaisons) et on les nomme de façon judicieuse par rapport à la chaîne cinématique. Il y aura plusieurs repères liés un solide si les directions privilégiées ne sont pas orthogonales.

On paramètre ensuite les liaisons.

On réalise pour les paramètres de rotations des « figures de changement de base » : l'angle est représenté dans le premier cadran avec le vecteur directeur de l'axe de rotation perpendiculaire au plan de la feuille et orienté vers soi. L'angle est orienté d'un vecteur de la base « horizontale-verticale » vers un vecteur de la base « oblique ».



Paramètre de rotation $\psi = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_1 \right) = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1 \right)$
autour de l'axe $\vec{z}_{0,1}$.

2. Vitesses d'un solide

2.1. Vitesse instantanée d'un point

La vitesse instantanée d'un point P par rapport à un référentiel R_i est définie comme la limite de la variation de sa position $\overrightarrow{\Delta O_i P}$, entre deux instants séparés d'une durée Δt , divisée par cette durée Δt quand la durée Δt tend vers zéro :

$$\overrightarrow{V(P/i)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta O_i P}}{\Delta t} = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_i P} \right)_{R_i}$$

◆ Remarque

- Le point P doit être clairement défini pour exprimer sans erreur sa position.
- La vitesse de P est indépendante du point O_i , ce point doit juste être fixe dans le repère R_i .
- Le vecteur vitesse de P est tangent à la trajectoire de P dans son mouvement par rapport à R_i .

Expression en coordonnées cartésiennes

$$\text{Si } \overrightarrow{O_i P} = x_P \overrightarrow{x_i} + y_P \overrightarrow{y_i} + z_P \overrightarrow{z_i}$$

$$\text{Alors } \overrightarrow{V(P/i)} = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_i P} \right)_{R_i} = \frac{d}{dt} x_P \overrightarrow{x_i} + \frac{d}{dt} y_P \overrightarrow{y_i} + \frac{d}{dt} z_P \overrightarrow{z_i} = \dot{x}_P \overrightarrow{x_i} + \dot{y}_P \overrightarrow{y_i} + \dot{z}_P \overrightarrow{z_i}$$

2.2. Dérivation d'un vecteur exprimé dans une base mobile par rapport à la base de dérivation

Ce paragraphe présente la dérivation, par rapport au temps et par rapport à une base R_i , d'un vecteur \vec{OP} exprimé dans une base R_j , mobile par rapport à R_i (c'est-à-dire que l'orientation des vecteurs de la base R_j n'est pas constante par rapport à la base R_i).

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right|_i &= \left. \frac{d(x_j \vec{x}_j + y_j \vec{y}_j + z_j \vec{z}_j)}{dt} \right|_i \\ &= \left. \frac{dx_j}{dt} \vec{x}_j + x_j \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i + \left. \frac{dy_j}{dt} \vec{y}_j + y_j \frac{d\vec{y}_j}{dt} \right|_i + \left. \frac{dz_j}{dt} \vec{z}_j + z_j \frac{d\vec{z}_j}{dt} \right|_i \\ &= \dot{x}_j \vec{x}_j + x_j \left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i + \dot{y}_j \vec{y}_j + y_j \left. \frac{d\vec{y}_j}{dt} \right|_i + \dot{z}_j \vec{z}_j + z_j \left. \frac{d\vec{z}_j}{dt} \right|_i \\ &= \left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right|_j + x_j \left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i + y_j \left. \frac{d\vec{y}_j}{dt} \right|_i + z_j \left. \frac{d\vec{z}_j}{dt} \right|_i \end{aligned}$$

Il faut maintenant exprimer les dérivées des vecteurs unitaires de la base R_j :

$$\left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i, \left. \frac{d\vec{y}_j}{dt} \right|_i \text{ et } \left. \frac{d\vec{z}_j}{dt} \right|_i$$

Nous allons pour cela exploiter le fait que la base R_j soit orthonormée.

Les vecteurs \vec{x}_j , \vec{y}_j et \vec{z}_j sont unitaires, ce qui signifie leur carré est égal à 1. Donc la dérivée de leur carré est nulle.

$$\vec{x}_j^2 = \vec{x}_j \cdot \vec{x}_j = 1 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\vec{x}_j^2}{dt} \right|_i = 2 \vec{x}_j \cdot \left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i = \frac{d1}{dt} = 0$$

On considère le cas où la dérivée du vecteur est non nulle, ce qui signifie que la dérivée du vecteur soit perpendiculaire au vecteur pour le produit scalaire soit nul.

$$2 \vec{x}_j \cdot \left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i \perp \vec{x}_j \text{ car } \left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i \neq \vec{0}$$

La dérivée du vecteur n'aura donc pas de composante suivant la direction du vecteur, on peut ainsi écrire :

$$\left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i = 0 \vec{x}_j + a_{12} \vec{y}_j + a_{13} \vec{z}_j$$

$$\text{De même, } \left. \frac{d\vec{y}_j}{dt} \right|_i = a_{21} \vec{x}_j + 0 \vec{y}_j + a_{23} \vec{z}_j$$

$$\text{Et } \left. \frac{d\vec{z}_j}{dt} \right|_i = a_{31} \vec{x}_j + a_{32} \vec{y}_j + 0 \vec{z}_j$$

Les vecteurs \vec{x}_j , \vec{y}_j et \vec{z}_j sont orthogonaux deux à deux, leur produit scalaire est donc nul et la dérivée de ce produit aussi.

$$\vec{x}_j \cdot \vec{y}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d(\vec{x}_j \cdot \vec{y}_j)}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i \cdot \vec{y}_j + \vec{x}_j \cdot \left. \frac{d\vec{y}_j}{dt} \right|_i = 0$$

En introduisant les relations précédentes, on obtient des relations qui lient entre elles les composantes des dérivées :

$$\left(0 \vec{x}_j + a_{12} \vec{y}_j + a_{13} \vec{z}_j \right) \cdot \vec{y}_j + \vec{x}_j \cdot \left(a_{21} \vec{x}_j + 0 \vec{y}_j + a_{23} \vec{z}_j \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{12} + a_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = -a_{21}$$

Les deux autres relations d'orthogonalité donnent les relations :

$$\vec{y}_j \cdot \vec{z}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{23} + a_{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{23} = -a_{32}$$

$$\vec{z}_j \cdot \vec{x}_j = 0 \Rightarrow a_{31} + a_{13} = 0 \Rightarrow a_{31} = -a_{13}$$

On peut donc exprimer les dérivées de ces vecteurs avec seulement trois valeurs et écrire qu'elles sont au produit d'une matrice, constituée de ces valeurs, par le vecteur :

$$\left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ -a_{31} \end{pmatrix}_j = [\Omega] \vec{x}_j$$

$$\left. \frac{d\vec{y}_j}{dt} \right|_i = \begin{pmatrix} a_{21} \\ 0 \\ a_{23} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} -a_{12} \\ 0 \\ a_{23} \end{pmatrix}_j = [\Omega] \vec{y}_j$$

$$\left. \frac{d\vec{z}_j}{dt} \right|_i = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ 0 \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} a_{31} \\ -a_{23} \\ 0 \end{pmatrix}_j = [\Omega] \vec{z}_j$$

$$\text{avec } [\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & a_{23} & 0 \end{bmatrix}_j$$

La matrice étant antisymétrique, le produit matriciel peut être remplacé par un produit vectoriel :

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & a_{23} & 0 \end{bmatrix}_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} a_{31}z_j - a_{12}y_j \\ a_{12}x_j - a_{23}z_j \\ a_{23}y_j - a_{31}x_j \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{31} \\ a_{12} \end{pmatrix}_j \wedge \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}_j = \vec{\Omega}_{j/i} \wedge \vec{OP}$$

Finalement, on a la formule de dérivation vectorielle suivante :

$$\left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right|_j + \vec{\Omega}_{j/i} \wedge \vec{OP}$$

Nous allons maintenant voir que le vecteur $\vec{\Omega}_{j/i}$ est ce que l'on appelle le **vecteur de vitesse de rotation instantanée** du repère R_j par rapport à R_i .

Si le repère R_j tourne par rapport au repère R_i autour de l'axe $\vec{z}_{i,j}$ dont la rotation est paramétrée par un angle α .

$$\vec{x}_j = \cos \alpha \vec{x}_i + \sin \alpha \vec{y}_i \Rightarrow \left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i = \frac{d \cos \alpha}{dt} \vec{x}_i + \frac{d \sin \alpha}{dt} \vec{y}_i = -\dot{\alpha} \sin \alpha \vec{x}_i + \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{y}_i = \dot{\alpha} \vec{y}_j$$

$$\vec{y}_j = -\sin \alpha \vec{x}_i + \cos \alpha \vec{y}_i \Rightarrow \left. \frac{d\vec{y}_j}{dt} \right|_i = \frac{d(-\sin \alpha)}{dt} \vec{x}_i + \frac{d \cos \alpha}{dt} \vec{y}_i = -\dot{\alpha} \cos \alpha \vec{x}_i - \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{y}_i = -\dot{\alpha} \vec{z}_{i,j}$$

$$\left. \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right|_i = \vec{\Omega}_{j/i} \wedge \vec{x}_j = \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{31} \\ a_{12} \end{pmatrix}_j \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ -a_{31} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}_j \Rightarrow a_{12} = \dot{\alpha} \Rightarrow \vec{\Omega}_{j/i} = \dot{\alpha} \vec{z}_{i,j}$$

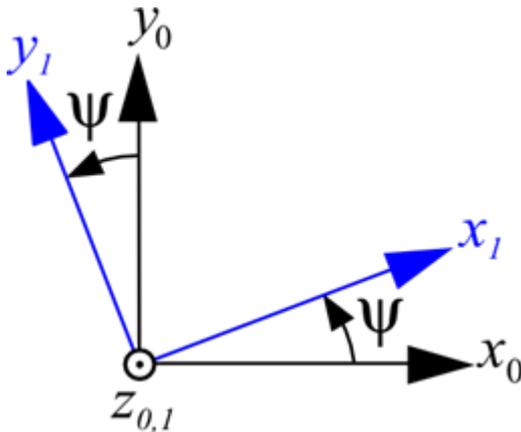
2.3. Vitesse instantanée de rotation

La vitesse de rotation instantanée d'un solide autour d'un axe (pas nécessairement fixe) par rapport à un référentiel R_i est définie comme la limite de la variation de sa position angulaire $\Delta\theta$ orientée suivant l'axe de rotation, entre deux instants séparés d'une durée Δt , divisée par cette durée Δt quand la durée Δt tend vers zéro :

$$\overrightarrow{\Omega}_{j/i} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \vec{u} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u} = \dot{\theta} \vec{u}$$

Exemple Rotation d'un repère

Rotation de R_1 par rapport à R_0 autour d'un axe commun $\vec{z}_{0,1}$.



La rotation est paramétrée par $\psi = \begin{pmatrix} \vec{x}_0, \vec{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_0, \vec{y}_1 \end{pmatrix}$

La vitesse de rotation est : $\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\psi} \vec{z}_{0,1}$

Ce vecteur « vitesse de rotation » exprimé dans une autre base peut avoir plusieurs composantes.

Si on paramètre l'orientation d'un $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport à un repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ avec les angles d'Euler (de type 1), c'est-à-dire par 3 rotations successives alors la vitesse de rotation du solide est la somme des trois vitesses de rotations relatives :

$$\Omega_{1/0} = \Omega_{1/R''} + \Omega_{R''/R'} + \Omega_{R'/0} = \dot{\phi}_{z_{R'',1}} + \dot{\theta}_{x_{R'',R'}} + \dot{\psi}_{z_{R',0}}$$

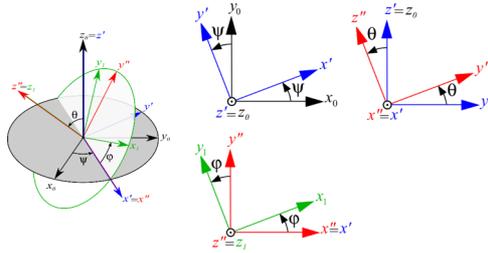
En l'exprimant dans la base R' par exemple, on a :

$$\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\phi} \cos \theta \vec{z}_{R'} - \dot{\phi} \sin \theta \vec{y}_{R'} + \dot{\theta} \vec{x}_{R'} + \dot{\psi} \vec{z}_{R'}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}_{R'}$$

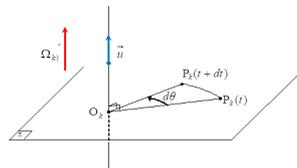
Remarque

On peut trouver une base où ce vecteur n'aura qu'une seule composante.



Un point P_j d'un solide j en rotation autour d'un axe $O_i z_{i,j}$ paramétrée par l'angle θ par rapport à un repère R_i a une vitesse $\overrightarrow{V}(P_j/i) = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_i P_j} \right|_i$

Si $\overrightarrow{O_i P_j} = r \vec{x}_j$ avec $r = cst$ alors $\overrightarrow{V}(P_j/i) = r \dot{\theta} \vec{y}_j$.



Dans le cas général, cette relation se traduit par $\overrightarrow{V}(P_j/i) = \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{O_i P_j}$

2.4. Champ des vitesses d'un solide

Soit deux points A et B fixes dans un repère R_j en mouvement par rapport à un repère R_i .

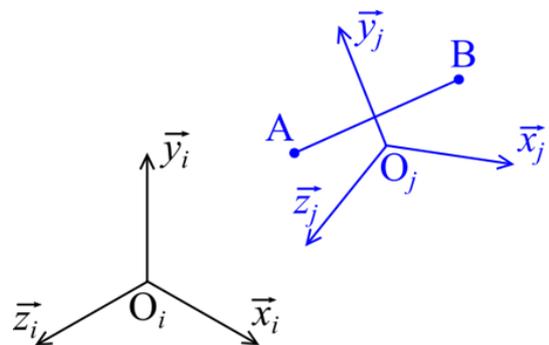
On peut exprimer la vitesse du point B en fonction de celle du point A.

La vitesse du point B par rapport au repère R_i est par définition :

$$\overrightarrow{V}(B/i) = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_i B} \right)_{R_i}$$

Si on décompose le vecteur position en passant par le point A, on a :

$$\overrightarrow{V}(B/i) = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_i A} \right)_{R_i} + \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right)_{R_i}$$



On reconnait alors dans l'expression, la vitesse du point A par rapport à un repère R_i :

$$\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_i A} \right|_i = \overrightarrow{V}(A/i)$$

Le vecteur \overrightarrow{AB} étant constant dans la base R_j , sa dérivée par rapport à R_i est :

$$\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right|_i = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right|_j + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{j/i}$$

On obtient alors la relation entre les vitesses de 2 points d'un solide par rapport à un repère. Elle est de la même forme que la relation de champs de moment :

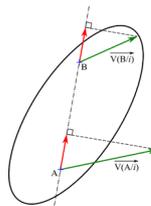
$$\overrightarrow{V(B/i)} = \overrightarrow{V(A/i)} + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{AB}$$

2.5. Equiprojectivité

Si un solide est considéré indéformable alors l'ensemble de ces points gardent entre eux des distances constantes au cours du temps :

Si A et B appartiennent à un solide indéformable alors $\overrightarrow{AB}^2 = cste$.

En dérivant par rapport au temps, on obtient $2\overrightarrow{AB} \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right)_{R_i} = 0$



En décomposant le vecteur \overrightarrow{AB} en passant par un point O_i fixe dans R_i :

$$\overrightarrow{AB} \left(\left(\frac{d\overrightarrow{O_i B}}{dt} \right)_{R_i} - \left(\frac{d\overrightarrow{O_i A}}{dt} \right)_{R_i} \right) = 0 \text{ d'où } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V(B/i)} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V(A/i)}$$

En divisant par la norme de \overrightarrow{AB} , il en résulte : $\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \cdot \overrightarrow{V(B/i)} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \cdot \overrightarrow{V(A/i)}$

Le champ des vitesses d'un solide indéformable est donc equiprojectif.

3. Torseur cinématique et mouvements

3.1. Torseur distributeur des vitesses

L'état de mouvement d'un solide indéformable k par rapport à un solide i peut donc être représenté par un torseur cinématique dont l'invariant vectoriel est le vecteur de rotation instantanée $\vec{\Omega}_{k/i}$ et le champ de moment est le champ de vitesses $\vec{V}(B/i) = \vec{V}(A/i) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{k/i}$.

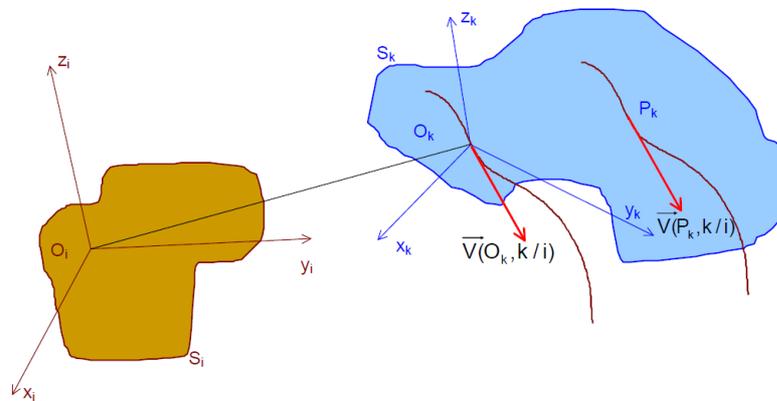
On le note : $\{V_{k/i}\}_P = \left\{ \vec{\Omega}_{k/i} \middle| \vec{V}(P/i) \right\}$

Les points A, B et P appartient au solide.

3.2. Cinématique de translation

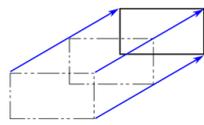
Dans un mouvement de translation d'un solide k par rapport à un solide i , le vecteur de rotation instantanée est nul $\vec{\Omega}_{k/i} = \vec{0}$ et l'ensemble des points du solide ont la même vitesse $\vec{V}(A,k/i) = \vec{V}(B,k/i)$ et la même accélération $\vec{\Gamma}(A,k/i) = \vec{\Gamma}(B,k/i)$.

Le torseur cinématique a donc la forme suivante : $\{V_{k/i}\}_P = \left\{ \vec{0} \middle| \vec{V}(P,k/i) \right\}$

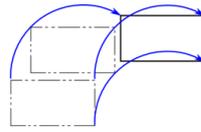


Mouvement de translation

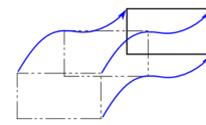
Un solide est animé d'un mouvement de translation par rapport à un autre si tout vecteur lié au premier garde une direction fixe par rapport au second.



Translation rectiligne



Translation circulaire

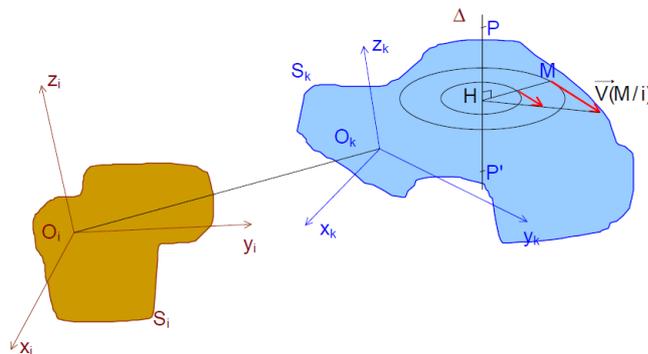


Translation curviligne

3.3. Cinématique de rotation

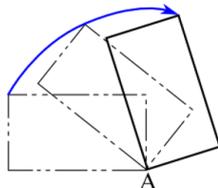
Dans un mouvement de rotation d'un solide k par rapport à un solide i , l'ensemble des points P situés sur l'axe de rotation ont une vitesse nulle $\vec{V}(P, k/i) = \vec{0}$ et les autres points M du solide ont une vitesse proportionnelle à leur distance à l'axe $\vec{V}(M, k/i) = \vec{V}(P, k/i) + \vec{MP} \wedge \vec{\Omega}_{k/i} = \vec{V}(P, k/i) + \vec{HP} \wedge \vec{\Omega}_{k/i}$ (H projection du point M sur l'axe de rotation).

Le torseur cinématique a donc la forme suivante sur l'axe de rotation : $\{V_{k/i}\}_P = \left\{ \vec{\Omega}_{k/i} \mid \vec{0} \right\}$

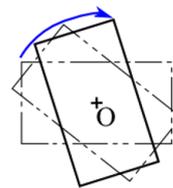


Mouvement de rotation

Un solide est animé d'un mouvement de rotation par rapport à un autre si deux points (formant un axe) liés au premier restent fixes par rapport au second au cours du mouvement.



Rotation de centre A



Rotation de centre O

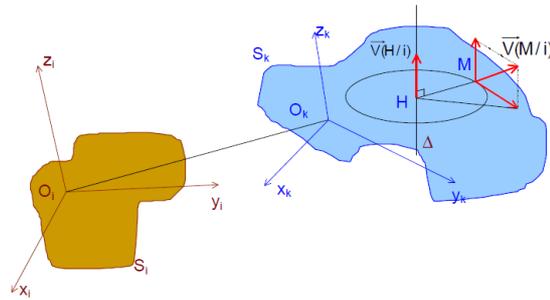
3.4. Cinématique d'un mouvement quelconque

Le torseur cinématique du mouvement d'un solide k par rapport à un solide i est :

$$\{V_{k/i}\}_P = \left\{ \overrightarrow{\Omega_{k/i}} \left| \overrightarrow{V(P, k/i)} \right. \right\}$$

Ce mouvement peut être considéré comme la somme d'une translation et d'une rotation autour d'un axe instantané de rotation (ou giration) Δ qui correspond à l'axe central du torseur cinématique.

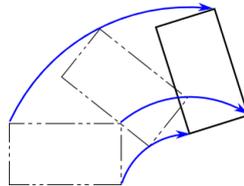
$$\{V_{k/i}\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \overrightarrow{V(H, k/i)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{k/i}} \\ \overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{\Omega_{k/i}} \end{array} \right\}$$



Si I un point de l'axe central $\Delta(t)$ alors $\overrightarrow{MI} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{k/i}} \wedge \overrightarrow{V(M, k/i)}}{\Omega_{k/i}^2} + \alpha \overrightarrow{\Omega_{k/i}}$.

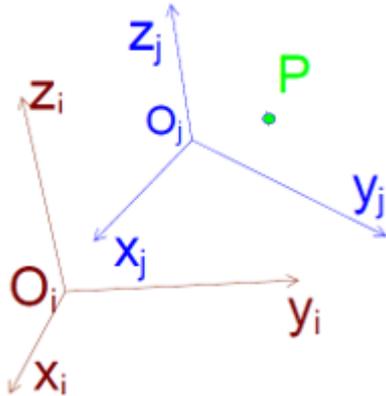
Définition Mouvement quelconque

Un mouvement est une combinaison d'une rotation et d'une translation.



3.5. Composition des mouvements et des vitesses

Soient deux repères R_i et R_j mobiles l'un par rapport à l'autre et un point P en mouvement par rapport à ceux-ci.



La vitesse du point P par rapport au repère R_i est :

$$\overrightarrow{V(P/i)} = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_i P} \right)_i$$

La vitesse du point P par rapport au repère R_j est :

$$\overrightarrow{V(P/j)} = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_j P} \right)_j$$

La vitesse du point P dans le mouvement de R_j par rapport au repère R_i est :

$$\overrightarrow{V(P, j/i)} = \overrightarrow{V(O_j/i)} - \overrightarrow{V(P/j)}$$

Cette vitesse correspond à la vitesse qu'aurait le point P à l'instant t s'il était fixe dans R_j .

Démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(P/i)} &= \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_i P} \right)_i \\ &= \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_i O_j} \right)_i + \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_j P} \right)_i \\ &= \overrightarrow{V(O_j/i)} + \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_j P} \right)_j + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{O_j P} \\ &= \overrightarrow{V(O_j/i)} + \overrightarrow{V(P/j)} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{O_j P} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression $\overrightarrow{V(O_j/i)} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{O_j P} = \overrightarrow{V(P, j/i)}$ du champ des vitesses dans le cas où P fixe dans R_j .

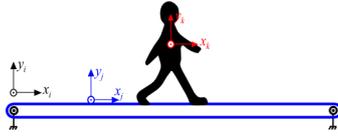
$$\text{Donc } \overrightarrow{V(P/i)} = \overrightarrow{V(P/j)} + \overrightarrow{V(P, j/i)}.$$

Si un point est fixe par rapport à un solide auquel est lié un repère R_k alors sa vitesse par rapport à ce repère est nulle : $\overrightarrow{V(P/k)} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{V(P, k/i)} = \overrightarrow{V(P/i)} - \vec{0} = \overrightarrow{V(P/i)}$.

Le mouvement d'un solide peut également être décomposé en passant par un repère intermédiaire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(P, k/i)} &= \overrightarrow{V(P/i)} - \overrightarrow{V(P/k)} \\ &= \overrightarrow{V(P/i)} - \overrightarrow{V(P/j)} + \overrightarrow{V(P/j)} - \overrightarrow{V(P/k)} \\ &= \overrightarrow{V(P, j/i)} + \overrightarrow{V(P, k/j)} \\ \overrightarrow{V(P, k/i)} &= \overrightarrow{V(P, k/j)} + \overrightarrow{V(P, j/i)} \end{aligned}$$

Exemple Individu marchant sur un tapis roulant



L'individu marche à une vitesse $\overrightarrow{V(G,k/j)}$ par rapport au tapis et le tapis avance à une vitesse $\overrightarrow{V(G,j/i)}$. L'individu se déplace donc à une vitesse $\overrightarrow{V(G,k/i)} = \overrightarrow{V(G,k/j)} + \overrightarrow{V(G,j/i)}$ par rapport au sol.

De même, les vecteurs de vitesses de rotation peuvent être décomposés :

$$\overrightarrow{\Omega_{k/i}} = \overrightarrow{\Omega_{k/j}} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

4. Cinématique du contact

4.1. Définitions

Avant tout, quelques définitions s'imposent.



Définition Point matériel

Portion de l'espace pourvue de matière et suffisamment petite pour être considérée comme ponctuelle.



Définition Point lié à un solide indéformable ou à un repère

Point fixe par rapport à un solide ou un repère lié à celui-ci. Autrement dit, les distances qui relient ce point aux autres points du solide sont des constantes.



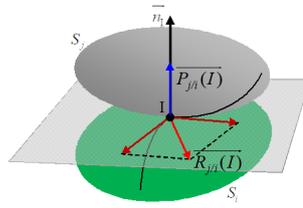
Définition Point géométrique

Un point peut avoir un rôle important bien qu'il n'appartienne à aucun solide, on l'appelle alors « point géométrique » par opposition à un point matériel (exemple du point de contact de la roue sur le sol).

4.2. Roulement et pivotement

Le vecteur de vitesse de rotation instantanée entre deux solides i et j en contact au point I peut être décomposé en deux parties : $\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \overrightarrow{P_{j/i}(I)} + \overrightarrow{R_{j/i}(I)}$

- le pivotement est la composante suivant $\overrightarrow{n_I}$ la normale à la surface de contact :
$$\overrightarrow{P_{j/i}(I)} = \left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \cdot \overrightarrow{n_I} \right) \overrightarrow{n_I}$$
- le roulement est la composante dans le plan tangent : $\overrightarrow{R_{j/i}(I)} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} - \overrightarrow{P_{j/i}(I)}$ ou
$$\overrightarrow{R_{j/i}(I)} = \overrightarrow{n_I} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{n_I} \right)$$



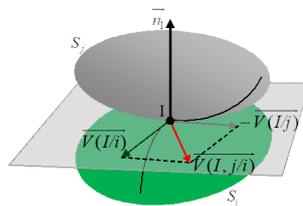
4.3. Vitesse de glissement

La vitesse de glissement est la vitesse du point géométrique (il n'appartient à aucun des solides) de contact I : $\overrightarrow{V(I,j/i)} = \overrightarrow{V(I/i)} - \overrightarrow{V(I/j)}$.

Comme il y a contact suivant la normale \vec{n}_I , il n'y a aucun déplacement relatif entre les deux solides dans cette direction donc $\overrightarrow{V(I,j/i)} \cdot \vec{n}_I = 0$.

Remarque

Cette équation est la dérivée de l'équation de liaison imposant le contact



4.4. Relation de non glissement

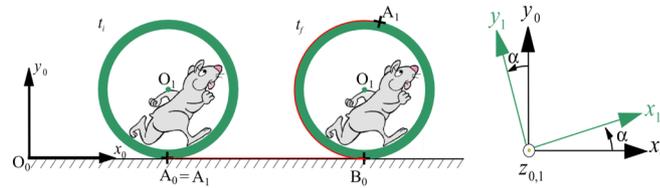
Lorsqu'il n'y a pas de glissement, la vitesse de glissement est nulle : $\overrightarrow{V(I,j/i)} = \vec{0}$

Le contact ponctuel de normale \vec{n}_I impose $\overrightarrow{V(I,j/i)} \cdot \vec{n}_I = 0$ (dérivée par rapport au temps de l'équation de liaison).

Le fait qu'il n'y a pas de glissement impose que la composante tangentielle (dans le plan perpendiculaire à la normale) de la vitesse est nulle : $\overrightarrow{V(I,j/i)} - \left(\overrightarrow{V(I,j/i)} \cdot \vec{n}_I \right) \vec{n}_I = \vec{0}$.

Illustration du roulement sans glissement d'une roue sur un plan (cas 2D)

Soit une roue (1) de rayon r en appui ponctuel sur un plan (0). Soit I_{10} le point géométrique de contact. A l'instant t_i ce point I_{10} est coïncident avec le point matériel A_0 du plan et le point matériel A_1 de la roue. A l'instant t_f ce point I_{10} est coïncident avec le point matériel B_0 du plan et le point matériel B_1 de la roue.



Le mouvement est paramétré par une translation $\overrightarrow{O_0O_1} = x\vec{x}_0$ et une rotation $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ autour de l'axe $\vec{z}_{0,1}$.

La vitesse de glissement est $\overrightarrow{V}(\mathbf{I}_{10}, \mathbf{1}/0)$. On peut la calculer de 2 façons :

- Soit par dérivation avec la formule de la base mobile

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}(\mathbf{I}_{10}, \mathbf{1}/0) &= \overrightarrow{V}(\mathbf{I}_{10}/0) - \overrightarrow{V}(\mathbf{I}_{10}/1) \\ &= \left. \frac{d\vec{O}_0\vec{I}_{10}}{dt} \right|_{R_0} - \left. \frac{d\vec{O}_1\vec{I}_{10}}{dt} \right|_{R_1} \\ &= \dot{x}\vec{x}_0 - \left. \frac{dr\vec{y}_0}{dt} \right|_{R_0} - \dot{\alpha}\vec{z}_0 \wedge r\vec{y}_0 \\ &= (\dot{x} + r\dot{\alpha})\vec{x}_0 \end{aligned}$$

- Soit par le champ des vitesses

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}(\mathbf{I}_{10}, \mathbf{1}/0) &= \overrightarrow{V}(\mathbf{O}_1, \mathbf{1}/0) + \mathbf{I}_{10}\mathbf{O}_1 \wedge \overrightarrow{\Omega}_{1/0} \\ &= \dot{x}\vec{x}_0 + -r\vec{y}_0 \wedge \dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ &= (\dot{x} + r\dot{\alpha})\vec{x}_0 \end{aligned}$$

La condition de roulement sans glissement est $\overrightarrow{V}(\mathbf{I}_{10}, \mathbf{1}/0) \cdot \vec{x}_0 = 0$ donc $\dot{x} + r\dot{\alpha} = 0 \Rightarrow \dot{x} = -r\dot{\alpha}$.

5. Accélérations d'un solide

5.1. Accélération d'un point

L'accélération instantanée d'un point P par rapport à un référentiel R_i est définie comme la limite la variation de sa vitesse $\overrightarrow{V(P/i)}$, entre deux instants séparés d'une durée Δt , divisée par cette durée Δt quand la durée Δt tend vers zéro :

$$\overrightarrow{\Gamma(P/i)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overrightarrow{V(P/i)}}{\Delta t} = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{V(P/i)} \right)_{R_i} = \left(\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{O_i P} \right)_{R_i}$$

Expression en coordonnées cartésiennes

$$\text{Si } \overrightarrow{V(P/i)} = \dot{x}_P \vec{x}_i + \dot{y}_P \vec{y}_i + \dot{z}_P \vec{z}_i$$

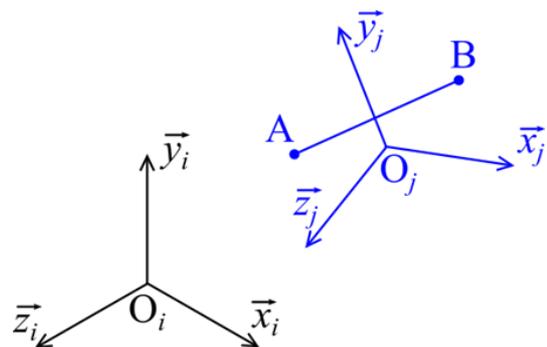
$$\text{Alors } \overrightarrow{\Gamma(P/i)} = \ddot{x}_P \vec{x}_i + \ddot{y}_P \vec{y}_i + \ddot{z}_P \vec{z}_i$$

5.2. Champs des accélérations

Soit deux points A et B fixes dans un repère R_j en mouvement par rapport à un repère R_i .

On peut exprimer la vitesse du point B en fonction de celle du point A

$$\overrightarrow{V(B/i)} = \overrightarrow{V(A/i)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$



En dérivant le champ des vitesses par rapport au temps, on obtient le champ des accélérations :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{B}/i) &= \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{V}(\mathbf{B}/i) \right|_i \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{V}(\mathbf{A}/i) \right|_i + \left. \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\mathbf{BA}} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \right) \right|_i \\
 &= \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{A}/i) + \overrightarrow{\mathbf{BA}} \wedge \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \right|_i + \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\mathbf{BA}} \right|_i \wedge \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \\
 &= \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{A}/i) + \overrightarrow{\mathbf{BA}} \wedge \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \right|_i + \left(\overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{\mathbf{BA}} \right) \wedge \overrightarrow{\Omega}_{j/i}
 \end{aligned}$$

◆ Remarque

Le champ des accélérations n'est pas un champ de moments.

5.3. Composition des accélérations

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{P}/i) &= \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/i) \right) \right)_i \\
 &= \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{V}(\mathbf{P},j/i) \right) \right)_i + \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/j) \right) \right)_i \\
 &= \left(\left. \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{V}(\mathbf{O}_j/i) + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} \right) \right) \right)_i + \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/j) \right) \right)_j + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/j) \\
 &= \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{V}(\mathbf{O}_j/i) \right) \right)_i + \left(\left. \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} \right) \right) \right)_i + \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{P}/j) + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/j) \\
 &= \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{O}_j/i) + \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \right) \right)_i \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} \right) \right)_i + \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{P}/j) + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/j) \\
 &= \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{O}_j/i) + \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \right) \right)_i \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \left(\left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} \right) \right)_j + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} \right) + \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{P}/j) + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/j) \\
 &= \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{O}_j/i) + \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \right) \right)_i \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/j) + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} \right) + \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{P}/j) + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/j) \\
 &= \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{O}_j/i) + \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \right) \right)_i \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} \right) + \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{P}/j) + 2\overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/j)
 \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression du champ des accélérations dans le cas où \mathbf{P} fixe dans R_j .

$$\overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{O}_j/i) + \left(\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \right) \right)_{R_i} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} + \overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_j\mathbf{P}} \right) = \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{P},j/i)$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{P}/i) = \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{P},j/i) + \overrightarrow{\Gamma}(\mathbf{P}/j) + 2\overrightarrow{\Omega}_{j/i} \wedge \overrightarrow{V}(\mathbf{P}/j)$$

L'accélération du point P dans le mouvement de R_j par rapport au repère R_i est donc :

$$\overrightarrow{\Gamma(P, j/i)} = \overrightarrow{\Gamma(P/i)} - \overrightarrow{\Gamma(P/j)} - 2\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{V(P/j)}$$

Si le point P appartient à un solide k alors la composition des accélérations s'exprime :

$$\overrightarrow{\Gamma(P, k/i)} = \overrightarrow{\Gamma(P, k/j)} + \overrightarrow{\Gamma(P, j/i)} + 2\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{V(P, k/j)}$$

Le terme $2\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{V(P, k/j)}$ représente ce qu'on appelle l'accélération de Coriolis ou complémentaire.

6. Cinématique graphique

6.1. Mouvements plans

Les trajectoires de l'ensemble des points dans un mouvement plan sont contenues dans des plans parallèles de normale \vec{n} .

Les vecteurs **vitesse instantanée des points** $\vec{V}(P, j/i)$ sont eux aussi contenus dans des plans parallèles de normale \vec{n} , étant donné qu'ils sont tangents à la trajectoire du point.

Le vecteur **vitesse instantanée de rotation** $\vec{\Omega}_{j/i}$ est perpendiculaire au plan. Si l'on écrit la relation de champ de vitesses pour 2 points contenus dans le plan du mouvement en projection sur la normale au plan alors on obtient :

$$\vec{V}(B, j/i) \cdot \vec{n} = \vec{V}(A, j/i) \cdot \vec{n} + (\vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{j/i}) \cdot \vec{n} \Rightarrow 0 = (\vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{j/i}) \cdot \vec{n}$$

Etant donné que $\vec{BA} \perp \vec{n}$, il faut que $\vec{\Omega}_{j/i} = k\vec{n}$ pour que $(\vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{j/i})$ soit perpendiculaire à \vec{n} , \vec{BA} et $\vec{\Omega}_{j/i}$.

On en déduit que dans un mouvement plan, le pas du torseur est nul. Ce qui signifie que la vitesse d'un point de l'axe instantané de rotation est nulle.

L'intersection de l'axe instantané de rotation avec le plan du mouvement est un point, que l'on appelle centre instantané de rotation (CIR). Il y a non glissement au centre instantané de rotation.

$$\vec{V}(A, j/i) \perp \vec{\Omega}_{j/i} \Leftrightarrow \vec{V}(A, j/i) \cdot \vec{\Omega}_{j/i} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{V}(A, j/i) \cdot \vec{\Omega}_{j/i}}{\Omega_{j/i}^2} = 0 \Rightarrow \vec{V}(I, j/i) = \lambda \vec{\Omega}_{j/i} = \vec{0}$$

6.2. Positionnement du centre instantané de rotation (CIR)

$$\vec{AI} = \frac{\vec{\Omega}_{j/i} \wedge \vec{V}(A, j/i)}{\Omega_{j/i}^2} + k\vec{\Omega}_{j/i}$$

Dans le cas d'un mouvement plan, les points A et I appartiennent au plan : ce qui signifie que $\vec{AI} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow k = 0$.

On en déduit que le vecteur \vec{AI} est perpendiculaire à $\vec{\Omega}_{j/i}$ (évident car $\vec{\Omega}_{j/i}$ est perpendiculaire au plan) et à $\vec{V}(A, j/i)$. Ce qui signifie que le centre instantané de rotation se situe sur la droite perpendiculaire à $\vec{V}(A, j/i)$ passant par le point A.

Si on connaît les vitesses (non colinéaires) de deux points dans le mouvement alors on peut positionner graphiquement le centre instantané de rotation à l'intersection des deux droites passant par le point et perpendiculaire à la vitesse du point.

Cas particulier de la translation : le centre instantané de rotation est rejeté à l'infini perpendiculairement aux vitesses des points.

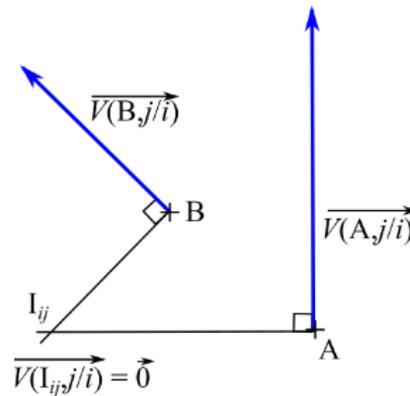
Cas particulier de la rotation : le centre de la rotation est le CIR.

Méthode

- Positionner le centre instantané de rotation (CIR) d'un mouvement plan
 - A partir des vitesses de 2 points dans ce mouvement

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AI_{ij}} \perp \overrightarrow{V(A, j/i)} \\ \overrightarrow{BI_{ij}} \perp \overrightarrow{V(B, j/i)} \end{array} \right\} \Rightarrow I_{ij}$$

Le CIR I_{ij} d'un mouvement plan est à l'intersection des perpendiculaires aux vitesses des points dans ce mouvement.

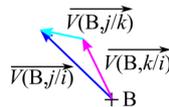


- Déterminer graphiquement ou analytiquement la vitesse d'un point dans un mouvement plan
 - A partir de la vitesse d'un point dans le mouvement et de la position du CIR

$$\overrightarrow{V(B, j/i)} = \overrightarrow{V(A, j/i)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

- A partir de vitesses du point dans d'autres mouvements

$$\overrightarrow{V(B, j/i)} = \overrightarrow{V(B, j/k)} + \overrightarrow{V(B, k/i)}$$

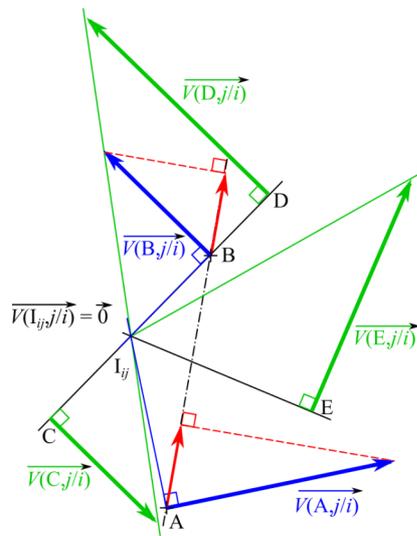


- La vitesse du CIR d'un mouvement plan est nulle dans ce mouvement

$$\overrightarrow{V(I_{ij}, j/i)} = \vec{0}$$

- Lorsqu'il y a non-glissement au point de contact entre 2 solides, cela signifie que la vitesse du point géométrique de contact est nulle dans le mouvement des 2 solides en contact. Le point de contact où il y a non glissement est donc le CIR du mouvement relatif des 2 solides en contact.

Lorsque le mouvement d'un système est contenu dans un plan, on peut utiliser une méthode graphique pour déterminer les vitesses grâce aux propriétés d'équiprojectivité et de champ des vitesses.



$$\vec{V}(A, j/i) \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \vec{V}(B, j/i) \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$

Cas d'application : étude cinématique d'un 7. différentiel d'automobile

Un différentiel est un système mécanique qui a pour fonction de distribuer une vitesse de rotation par répartition de l'effort cinématique, de façon adaptative, immédiate et automatique, aux besoins d'un ensemble mécanique.

Par exemple, il est très utile sur un véhicule automobile où il permet aux roues motrices de tourner à des vitesses différentes lors du passage d'une courbe : les roues situées à l'extérieur du virage tournent plus vite que celles situées à l'intérieur.

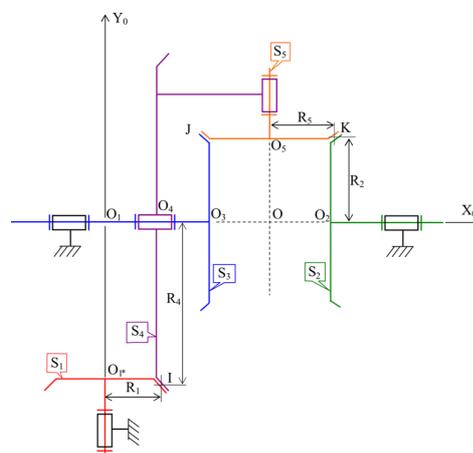
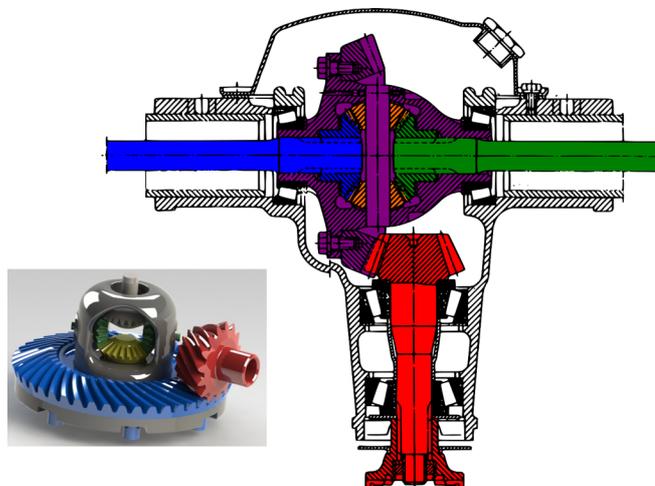
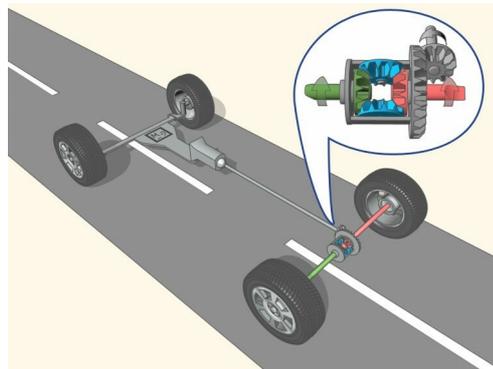
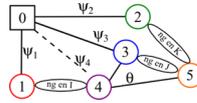


Schéma cinématique

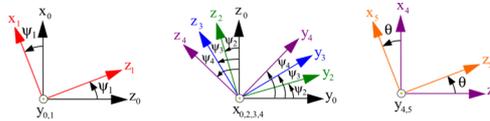
! Attention Graphe des liaisons

Le schéma cinématique ne respecte pas tout à fait la géométrie du dessin d'ensemble ; le principe de fonctionnement est en revanche identique.



7.1. Paramétrage et figures de changement de base

Le mouvement du solide i ($i = 1, 2, 3, 4$) par rapport à 0 est paramétré par l'angle ψ_i ;
Le mouvement du satellite 5 par rapport à la couronne 4 est paramétré par l'angle θ .



7.2. Calcul des vitesses de glissement au point I

Deux méthodes peuvent être employées : par dérivation ou par composition des mouvements et champ des vitesses d'un mouvement.

Le point I est le point géométrique de contact : il est fixe dans R_0 .

⚙ Méthode Par dérivation

$$\overrightarrow{V(I, 4/1)} = \overrightarrow{V(I/1)} - \overrightarrow{V(I/4)}$$

Avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(I/4)} &= \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_4 I} \right)_4 = \left(\frac{d}{dt} \left(-R_4 \overrightarrow{Y_0} \right) \right)_4 \\ &= \left(\frac{d}{dt} \left(-R_4 \overrightarrow{Y_0} \right) \right)_0 + \overrightarrow{\Omega}_{0/4} \wedge -R_4 \overrightarrow{Y_0} \\ &= \vec{0} + (-\dot{\psi}_4 \overrightarrow{X_0}) \wedge -R_4 \overrightarrow{Y_0} = R_4 \dot{\psi}_4 \overrightarrow{Z_0} \end{aligned}$$

Et

$$\overrightarrow{V(I/1)} = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1^* I} \right)_1 = \left(\frac{d}{dt} \left(R_1 \overrightarrow{X_0} \right) \right)_1 = \overrightarrow{\Omega}_{0/1} \wedge R_1 \overrightarrow{X_0} = (-\dot{\psi}_1 \overrightarrow{Y_0}) \wedge R_1 \overrightarrow{X_0} = R_1 \dot{\psi}_1 \overrightarrow{Z_0}$$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{V(I, 4/1)} = (R_1\dot{\psi}_1 - R_4\dot{\psi}_4)\overrightarrow{Z}_0$$

⚙ Méthode Par champ des vitesses

On utilise le point O_1 , fixe dans le mouvement de 4/1 puisque situé à l'intersection des axes de rotation de 4 et 1 par rapport à 0.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(I, 4/1)} &= \overrightarrow{V(O_1, 4/1)} + \overrightarrow{\Omega}_{4/1} \wedge \overrightarrow{O_1I} \\ &= \vec{0} + \left(\overrightarrow{\Omega}_{4/0} + \overrightarrow{\Omega}_{0/1} \right) \wedge \overrightarrow{O_1I} \\ &= \left(\dot{\psi}_4 \overrightarrow{X}_0 - \dot{\psi}_1 \overrightarrow{Y}_0 \right) \wedge \left(R_1 \overrightarrow{X}_0 - R_4 \overrightarrow{Y}_0 \right) \\ &= (R_1\dot{\psi}_1 - R_4\dot{\psi}_4)\overrightarrow{Z}_0 \end{aligned}$$

7.3. Calcul des Vitesses de glissement au point J

J est fixe dans R_4 .

⚙ Méthode Par dérivation

$$\overrightarrow{V(J, 5/3)} = \overrightarrow{V(J/3)} - \overrightarrow{V(J/5)}$$

Avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(J/3)} &= \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_3J} \right)_3 = \left(\frac{d}{dt} \left(R_2 \overrightarrow{Y}_4 \right) \right)_3 \\ &= \overrightarrow{\Omega}_{4/3} \wedge R_2 \overrightarrow{Y}_4 = (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \overrightarrow{X}_{0,4} \wedge R_2 \overrightarrow{Y}_4 = R_2 (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \overrightarrow{Z}_4 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(J/5)} &= \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_5J} \right)_5 = \left(\frac{d}{dt} \left(-R_5 \overrightarrow{X}_{0,4} \right) \right)_5 \\ &= \overrightarrow{\Omega}_{4/5} \wedge -R_5 \overrightarrow{X}_0 = -\dot{\theta} \overrightarrow{Y}_{4,5} \wedge -R_5 \overrightarrow{X}_{0,4} = -R_5 \dot{\theta} \overrightarrow{Z}_4 \end{aligned}$$

⚙ Méthode Par champ des vitesses

On utilise le point O , fixe dans le mouvement de 5/3 puisque situé à l'intersection des axes de rotation de 5 et 3 par rapport à 4.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V(J, 5/3)} &= \overrightarrow{V(O, 5/3)} + \overrightarrow{\Omega_{5/3}} \wedge \overrightarrow{OJ} \\
&= \vec{0} + \left(\overrightarrow{\Omega_{5/4}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} + \overrightarrow{\Omega_{0/3}} \right) \wedge \overrightarrow{OJ} \\
&= \left[\dot{\theta} \overrightarrow{Y_{4,5}} + (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \overrightarrow{X_{4,0}} \right] \wedge \left(R_2 \overrightarrow{Y_4} - R_5 \overrightarrow{X_{4,0}} \right) \\
&= \left[R_2 (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) + R_5 \dot{\theta} \right] \overrightarrow{Z_4}
\end{aligned}$$

7.4. Calcul des Vitesses de glissement au point K

De même que pour le point J ! K est fixe dans R_4 .

Méthode Par dérivation

$$\overrightarrow{V(K, 5/2)} = \overrightarrow{V(K/2)} - \overrightarrow{V(K/5)}$$

Avec

$$\overrightarrow{V(K/2)} = \overrightarrow{V(K, 4/2)} = R_2 (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_2) \overrightarrow{Z_4} \text{ et } \overrightarrow{V(K/5)} = \overrightarrow{V(K, 4/5)} = R_5 \dot{\theta} \overrightarrow{Z_4}$$

Donc

$$\overrightarrow{V(K, 5/2)} = \left[R_2 (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_2) - R_5 \dot{\theta} \right] \overrightarrow{Z_4}$$

Méthode Par champ des vitesses

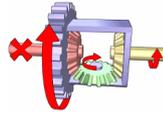
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V(K, 5/2)} &= \overrightarrow{V(O, 5/2)} + \overrightarrow{\Omega_{5/2}} \wedge \overrightarrow{OK} \\
&= \left[R_2 (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_2) - R_5 \dot{\theta} \right] \overrightarrow{Z_4}
\end{aligned}$$

7.5. Cas particuliers de fonctionnement

En ligne droite sur sol sec : $\dot{\psi}_4 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3$; $\dot{\theta} = 0$

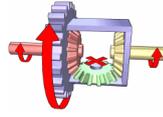
En virage : $\dot{\psi}_2 > \dot{\psi}_3$ ou $\dot{\psi}_2 < \dot{\psi}_3$; $\dot{\psi}_4 = \frac{\dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3}{2}$; $\dot{\theta} \neq 0$

Une roue bloquée : $\dot{\psi}_3 = 0 \Rightarrow \dot{\psi}_2 = 2\dot{\psi}_4$; $\dot{\theta} \neq 0$



Roue bloquée

Différentiel bloqué : $\dot{\psi}_4 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3$; $\dot{\theta} = 0$



Différentiel bloqué

Sur banc, moteur arrêté, 1 vitesse enclenchée : $\dot{\psi}_4 = 0$; $\dot{\psi}_3 = -\dot{\psi}_2$; $\dot{\theta} = \frac{R_2}{R_5} \dot{\psi}_3$

8. Exercices de cinématique

8.1. Exercice : Joint de Cardan

Le joint de Cardan permet la transmission d'une rotation angulaire entre deux arbres dont les axes géométriques concourent en un même point.

Cette technique est utilisée sur les véhicules pour accoupler deux arbres tournants non alignés ou dont les positions angulaires de l'un par rapport à l'autre peuvent varier ; par exemple l'axe du volant et le boîtier de direction, surtout dans le cas d'un volant réglable en hauteur par rapport au conducteur.



L'invention de ce joint en 1545 est attribuée au mathématicien italien Girolamo Cardano (Jérôme Cardan en français). Ce célèbre savant italien se serait inspiré d'un compas de marine fixé sur deux cercles articulés. Il a décrit l'articulation portant son nom dans un traité de physique intitulé « De subtilitate rerum ».



Le joint de Cardan est constitué :

- d'un arbre d'entrée (1) en liaison pivot avec le bâti (0) paramétrée $\psi_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$
- d'un arbre de sortie (2) en liaison pivot avec le bâti (0) paramétré $\psi_2 = (\vec{y}_{0*}, \vec{y}_2) = (\vec{z}_{0*}, \vec{z}_2)$
- d'un croisillon (3) en liaison pivot avec l'arbre d'entrée (1) et avec arbre de sortie (2) ; les axes de ces 2 liaisons pivot sont perpendiculaires. Ces liaisons pivot ne sont pas paramétrées.

L'arbre de sortie (2) est désaxé de l'arbre d'entrée (1) d'un angle $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_{0*}) = cste.$

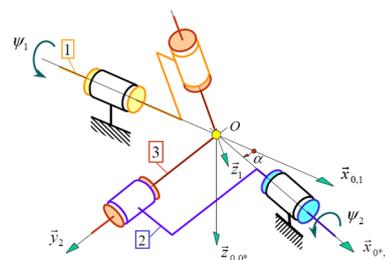


Schéma cinématique



Question 1

Écrire la (ou les) équation(s) de joint imposée(s) par le croisillon (3).

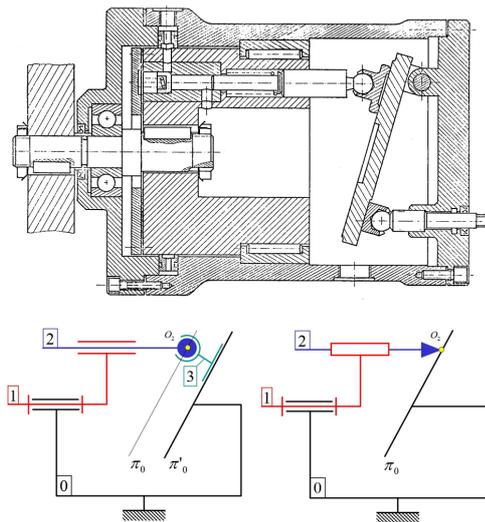
Question 2

En déduire le degré de mobilité du mécanisme.

Question 3

Calculer le rapport des vitesses $\frac{\dot{\psi}_2}{\dot{\psi}_1}$, le joint de Cardan est-il homocinétique ?

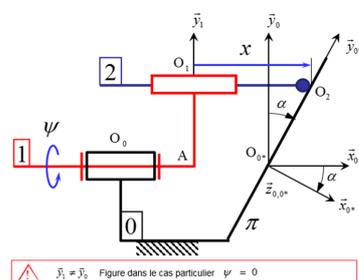
8.2. Exercice : Pompe à barillet mobile



Question 1

Montrer que la liaison rotule entre 2 et 3 plus la liaison appui-plan entre 3 et 0 sont équivalentes à une liaison ponctuelle.

Indice :



$$\overrightarrow{AO_{0*}} = h\overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{AO_1} = R\overrightarrow{y_1}$$

$$\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_{0*}})$$

La pompe est modélisée par :

- Un barillet (1) en liaison pivot avec le carter (0), d'axe $(O_0, \overrightarrow{x_0})$ et paramétrée $\psi = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$
- Un piston (2) en liaison glissière avec le barillet (1), d'axe $(O_1, \overrightarrow{x_0})$ et paramétrée $x = \overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{x_0}$, et en liaison ponctuelle avec le carter (0), de normale $\overrightarrow{x_{0*}}$ et non paramétrée.

Question 2

Tracer le graphe des liaisons et les figures de changement de bases.

Question 3

Déterminer la relation entre la rotation du barillet et la translation du piston (ou traduisant le contact entre le piston et le plan incliné).

Question 4

Calculer le débit instantané d'une pompe à n pistons.

Question 5

Déterminer la vitesse de glissement du point de contact entre le piston et le plan incliné.

8.3. Exercice : Mécanisme planétaire à coulisse

Le mécanisme schématisé figure 1 transforme un mouvement de rotation continue en un mouvement de translation alternative et un mouvement de rotation continue.

Ce **mécanisme plan** est constitué :

- D'une manivelle S_1 en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_{0,1}})$ avec le bâti S_0 , paramétrée $\psi_1 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$.
- D'un pignon S_2 en liaison pivot d'axe $(O_2, \overrightarrow{z_{1,2}})$ avec S_1 , paramétrée $\psi_2 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$.
- D'une coulisse S_3 en liaison glissière d'axe $(O, \overrightarrow{x_{0,3}})$ avec S_0 , paramétrée $x = \overrightarrow{OO_3} \cdot \overrightarrow{x_{0,3}}$.

- D'une roue S_4 en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_{0,4})$ avec le bâti S_0 , paramétrée $\psi_4 = (\vec{x}_0, \vec{x}_4)$.

Par ailleurs :

- deux ergots du pignon S_2 , situés en A et B, couissent dans une rainure d'axe $(O_3, \vec{y}_{0,3})$ usinée sur S_3 ;
- la roue S_4 est en contact en I avec le pignon S_2 sur lequel elle roule sans glisser.

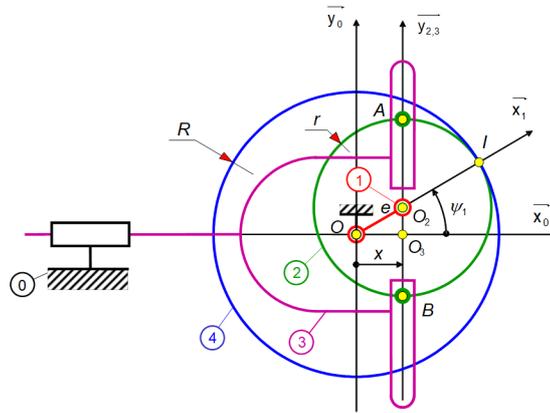


Figure 1 : mécanisme planétaire à coulisse

Partie I

Etude du sous ensemble {S1+S2+S3}

Question 1

Ecrire la ou les équations de liaison traduisant la fermeture de chaîne réalisée par la liaison 2/3.

Question 2

Donner la mobilité du système.

Question 3

Préciser la nature du mouvement 3/0 ; donner son torseur distributeur des vitesses en O_3 et l'accélération de O_3 .

Question 4

Préciser la nature du mouvement 2/0 ; définir la trajectoire de A, le torseur distributeur des vitesses en A et l'accélération de A et O_2 .

Question 5

Préciser la nature du mouvement 2/3 ; donner le torseur des vitesses en A et l'accélération de A et O_2 .

Partie II

Etude du mécanisme complet

Question 6

Ecrire la relation traduisant le non glissement entre 2 et 4 en I et donner la mobilité du système.