

# STATIQUE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

**Date :** 19/12/222

**Licence :**

Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage des Conditions Initiales à l'Identique :  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/fr/>

**auteur·e(s) :** Sébastien Morterolle, INSA de Lyon

# Table des matières

|  |    |
|--|----|
| Objectifs .....  | 4  |
| 1. Moment d'un vecteur.....  | 5  |
| 1.1. Moment d'un vecteur lié   | 5  |
| 1.2. Moment d'un vecteur glissant                                    | 5  |
| 1.3. Champ de moments / Formule du transport de moments              | 5  |
| 1.4. Equiprojectivité et champ de moments                            | 6  |
| 2. Torseurs .....  | 7  |
| 2.1. Torseurs  | 7  |
| 2.2. Auto-moment et torseurs particuliers                            | 7  |
| 2.3. Axe central   | 8  |
| 2.4. Torseurs équivalents  | 9  |
| 2.5. Exercice : Calculer torseur équivalent (ex. barrage droit)      | 12 |
| 3. Modélisation des liaisons mécaniques (normalisée).....            | 14 |
| 3.1. Liaisons parfaites  | 14 |
| 3.2. Ponctuelle ou sphère/plan                                       | 14 |
| 3.3. Linéaire rectiligne ou cylindre/plan                            | 15 |
| 3.3.1. Schéma et torseurs associés à une liaison linéaire rectiligne | 15 |
| 3.4. Linéaire annulaire ou sphère/cylindre ou sphère/prisme          | 16 |
| 3.4.1. Schéma et torseurs associés à une liaison linéaire annulaire  | 17 |
| 3.5. Appui plan ou plan/plan   | 17 |
| 3.5.1. Schéma et torseurs associés à une liaison appui plan          | 18 |
| 3.6. Rotule ou Sphérique   | 18 |
| 3.6.1. Schéma et torseurs associés à une liaison rotule de centre O  | 19 |
| 3.7. Sphérique à doigt   | 19 |
| 3.7.1. Schéma et torseurs associés à une liaison sphérique à doigt   | 19 |
| 3.8. Pivot-glissant ou Cylindrique                                   | 20 |
| 3.8.1. Schéma et torseurs associés à une liaison pivot-glissant      | 20 |
| 3.9. Pivot ou Rotoïde  | 21 |
| 3.9.1. Schéma et torseurs associés à une liaison pivot               | 21 |
| 3.10. Glissière ou Prismatique                                       | 22 |
| 3.10.1. Schéma et torseurs associés à une liaison glissière          | 23 |
| 3.11. Hélicoïdale  | 24 |
| 3.11.1. Schéma et torseurs associés à une liaison hélicoïdale        | 24 |
| 3.12. Encastrement ou Fixe   | 25 |
| 4. PFS.....  | 26 |
| 4.1. Principe fondamental de la statique                             | 26 |
| 4.2. Application PFS   | 26 |

|  |    |
|--|----|
| 5. Exercices de statique.....                        | 28 |
| 5.1. Exercice : Renvoi d'angle                       | 28 |
| 5.2. Exercice : Ouverture d'une vanne de débordement | 29 |

# Objectifs

---

- Objectif 1 : Modéliser une action mécanique par un torseur
- Objectif 2 : Résoudre un problème à partir de l'équilibre statique d'un système

# 1. Moment d'un vecteur

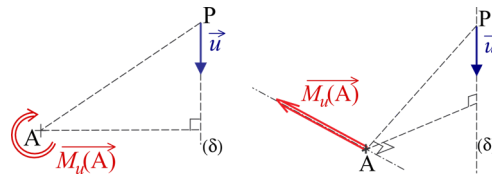
## 1.1. Moment d'un vecteur lié

Le moment d'un vecteur lié  $(P, \vec{u})$  en un point  $A$  est défini comme le produit vectoriel du vecteur  $(P, \vec{u})$  par le vecteur bipoint  $\overrightarrow{PA}$  :  $\overrightarrow{M_u(A)} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}$

Le moment  $\overrightarrow{M_u(A)}$  est lui aussi un vecteur lié mais au point  $A$  et de par les propriétés du produit vectoriel, il est perpendiculaire à  $\vec{u}$  et  $\overrightarrow{PA}$ .

### Représentation d'un moment

Un moment est généralement représenté par une double flèche droite orientée suivant la direction et le sens du moment. On trouve aussi des représentations par des flèches en arc de cercles autour de la direction du moment et orienté suivant le sens trigonométrique.



## 1.2. Moment d'un vecteur glissant

Le moment d'un vecteur glissant  $(\delta, \vec{u})$  en un point  $A$  est unique et peut être calculé à partir de n'importe quel point  $P_i$  de la droite  $\delta$  :  $\overrightarrow{M_u(A)} = \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{u}$ .

### Démonstration

Soit deux points distincts  $P_1$  et  $P_2$  appartenant à la droite  $\delta$ .

$$\overrightarrow{M_u(A)} = \overrightarrow{AP_2} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AP_1} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AP_1} \wedge \vec{u}$$

car  $\overrightarrow{P_1P_2}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires donc  $\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ .

## 1.3. Champ de moments / Formule du transport de moments

Si on connaît le moment d'un vecteur en un point A, on peut le calculer en un autre point B grâce à la formule :  $\vec{M}_u(B) = \vec{M}_u(A) + \vec{BA} \wedge \vec{u}$

**Démonstration**

$$\vec{M}_u(B) = \vec{BP}_i \wedge \vec{u} = (\vec{BA} + \vec{AP}_i) \wedge \vec{u} = \vec{BA} \wedge \vec{u} + \vec{AP}_i \wedge \vec{u} = \vec{M}_u(A) + \vec{BA} \wedge \vec{u}$$

### 1.4. Equiprojectivité et champ de moments

Le champ de moments est défini par

$$\vec{M}_u(B) = \vec{M}_u(A) + \vec{BA} \wedge \vec{u}$$

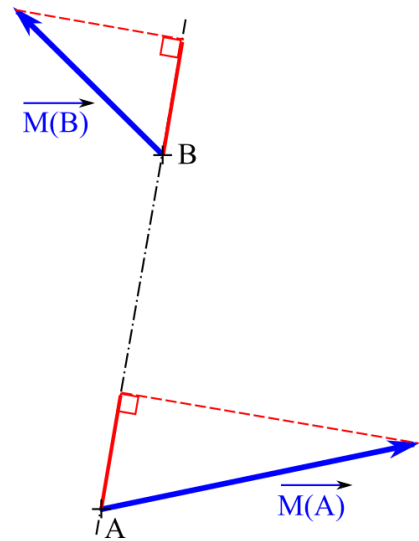
En projetant cette relation sur la droite (AB), on a :

$$\vec{M}_u(B) \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \vec{M}_u(A) \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + (\vec{BA} \wedge \vec{u}) \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$

Comme  $(\vec{BA} \wedge \vec{u}) \perp \vec{AB}$  alors  $(\vec{BA} \wedge \vec{u}) \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = 0$

On a donc la projection du moment en B sur la droite (AB) qui est égale à la projection du moment en A sur la droite (AB) :

$$\vec{M}_u(B) \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \vec{M}_u(A) \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$



**Conclusion**

Tout champ de moments est un champ équiprojectif (théorème de Delassus).

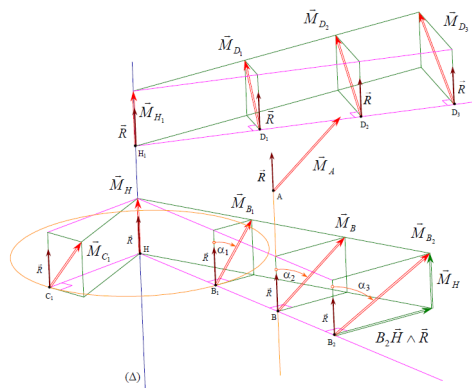


Illustration du champ de moment

## 2. Torseurs

### 2.1. Torseurs



#### Définition

Un torseur permet de représenter de manière concise un champ de vecteur équiprojectif. On dit qu'il réduit le champ en un point. Il est composé de 2 éléments de réduction : un vecteur libre, nommé « Résultante », et un vecteur lié, nommé « Moment », qui est la valeur du champ de moments au point de réduction.

De manière générale, un torseur réduit au point P en noté :

$$\{T\}_P = \left\{ \overrightarrow{Resultante} \mid \overrightarrow{Moment}(P) \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l|l} X & M_x \\ Y & M_y \\ Z & M_z \end{array} \right\}_P$$

Le champ de moment est défini par la relation suivante que nous allons détailler :

$$\overrightarrow{Moment}(B) = \overrightarrow{Moment}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{Resultante}$$

### 2.2. Auto-moment et torseurs particuliers

L'auto-moment d'un torseur est le produit scalaire de sa résultante par son moment en un point. Il est invariant (même valeur en tout point).

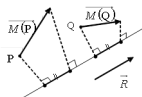
$$\text{Auto - moment} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M}(P)$$

#### Démonstration

$$\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M}(Q) = \overrightarrow{R} \cdot \left( \overrightarrow{M}(P) + \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{R} \right)$$

$$\Downarrow \left( \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{R} \right) \perp \overrightarrow{R}$$

$$\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M}(Q) = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M}(P) = A = \text{invariant}$$



Lorsque l'auto-moment est nul, on est dans le cas d'un torseur particulier :

- torseur nul : la résultante et le moment sont nuls ;
- torseur couple : la résultante est nulle et le moment est le même en tout point ;
- torseur glisseur : le moment est nul en tout point de l'axe central.

## 2.3. Axe central

L'axe central est le lieu où le torseur peut être réduit en une résultante et un couple, le moment y est minimum, la résultante et le moment y sont colinéaires.

C'est donc l'ensemble des points I tels que  $\overrightarrow{M(I)} = \lambda \overrightarrow{R}$  où  $\lambda$  est le pas du torseur.

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M(A)}}{\overrightarrow{R}^2} = cte$$

### Détermination de l'axe central

On cherche un point I\* tel que  $\overrightarrow{AI^*} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{M(A)}}{\overrightarrow{R}^2}$

L'axe central est la droite parallèle à la résultante et passant par ce point I\* :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{M(A)}}{\overrightarrow{R}^2} + \alpha \overrightarrow{R}.$$



## Démonstration

On cherche l'ensemble des points  $I$  tels que  $\overrightarrow{M(I)} = \lambda \overrightarrow{R}$ .

Si l'on connaît le moment en un point  $A$  alors on peut exprimer celui en  $I$

avec la formule du champ de moments  $\overrightarrow{M(I)} = \overrightarrow{M(A)} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{R}$ .

On a donc la relation suivante  $\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{M(A)} - \lambda \overrightarrow{R}$ .

On peut donc en déduire la position des points  $I$  par rapport au point  $A$ , celle-ci étant le résultat de la division vectorielle de  $(\overrightarrow{M(A)} - \lambda \overrightarrow{R})$  par

$\overrightarrow{R}$ .

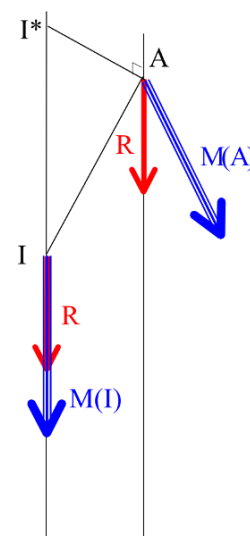
Ce qui donne  $\overrightarrow{IA} = -\frac{\overrightarrow{R} \wedge (\overrightarrow{M(A)} - \lambda \overrightarrow{R})}{R^2} + \alpha \overrightarrow{R}$

$\overrightarrow{R} \wedge \lambda \overrightarrow{R} = \vec{0}$  car les vecteurs sont colinéaires.

Finalement,  $\overrightarrow{IA} = -\frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{M(A)}}{R^2} + \alpha \overrightarrow{R}$

Soit le point particulier  $I^*$  appartenant à l'axe central tel que

$\overrightarrow{I^*A} = -\frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{M(A)}}{R^2}$ , c'est-à-dire tel que  $\overrightarrow{I^*A} \perp \overrightarrow{R}$ .



## Pas du torseur

On peut obtenir  $\lambda$  en multipliant scalairement  $\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{R} = \lambda \overrightarrow{R} - \overrightarrow{M(A)}$  par  $\overrightarrow{R}$  :

$$\overrightarrow{R} \cdot (\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{R}) = \overrightarrow{R} \cdot (\lambda \overrightarrow{R} - \overrightarrow{M(A)}) \Rightarrow 0 = \lambda \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{R} - \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M(A)} \quad \text{car}$$

$$\overrightarrow{R} \perp (\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{R}) \text{ d'où } \lambda = \frac{\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M(A)}}{R^2}$$

## 2.4. Torseurs équivalents

Deux torseurs sont équivalents si leurs éléments de réduction exprimés au même point sont égaux :

$$\{T_1\} = \{T_2\} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R}_1 = \overrightarrow{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_1(A) = \overrightarrow{M}_2(A) \end{cases}$$

### Torseur équivalent à la somme de 2 torseurs

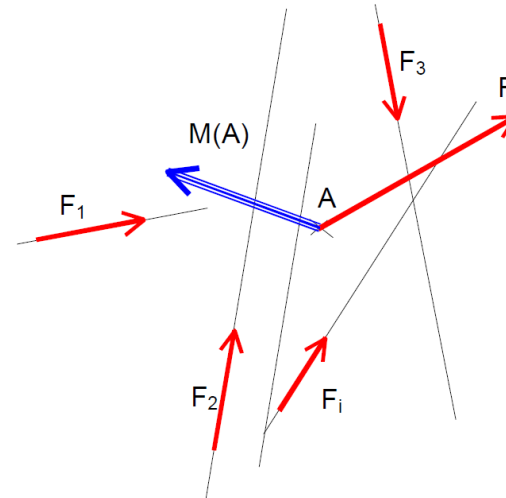
$$\{T_{1+2}\} = \{T_1\} + \{T_2\} = \begin{cases} \vec{R}_{1+2} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_{1+2}(A) = \overrightarrow{M}_1(A) + \overrightarrow{M}_2(A) = \overrightarrow{M}_1(P_1) + \overrightarrow{AP}_1 \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{M}_2(P_2) + \overrightarrow{AP}_2 \wedge \vec{R}_2 \end{cases}$$

### Torseur équivalent à un ensemble fini de glisseurs

Le torseur équivalent à un ensemble fini de glisseur est défini par :

$$\{T_{eq}\} = \sum_i \{T_i\} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_{eq} = \sum_i \vec{F}_i \\ \overrightarrow{M}_{eq}(A) = \sum_i \overrightarrow{M}_i(A) = \sum_i \overrightarrow{AP}_i \wedge \vec{F}_i \end{cases}$$

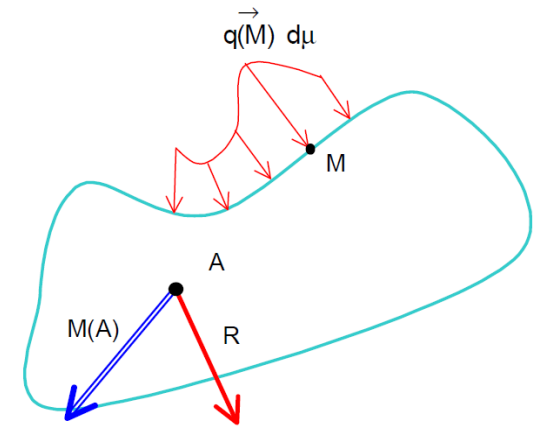
$P_i$  un point du support du vecteur  $\vec{F}_i$ .



## Torseur équivalent à un ensemble infini de glisseurs

Le torseur équivalent à un ensemble infini de glisseur  $\vec{q}(M) d\mu$  associé à un domaine  $D$  de l'espace (courbe, surface, volume) est défini par :

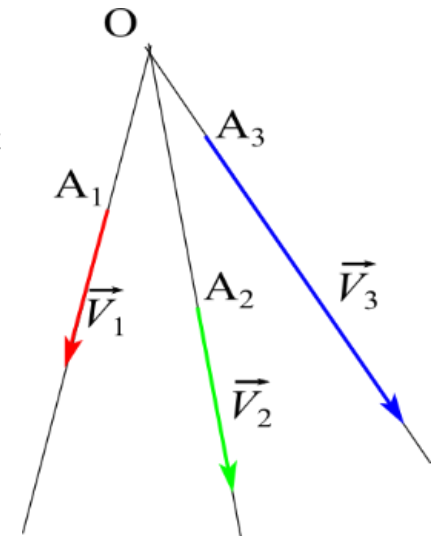
$$\{T_{eq}\} = \begin{cases} \vec{R}_{eq} = \int_D \vec{q}(M) d\mu \\ \vec{M}_{eq}(A) = \int_D \vec{AM} \wedge \vec{q}(M) d\mu \end{cases}$$



## Torseur équivalent à un ensemble de glisseurs concourants

Le torseur équivalent à un ensemble de glisseurs concourants est un glisseur dont le support passe par le point de concours et orienté suivant la résultante :

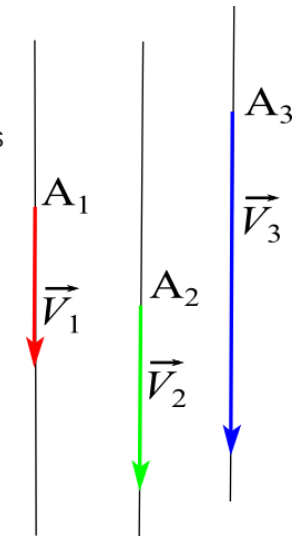
$$\{T_{eq}\} = \sum_i \{T_i\} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_{eq} = \sum_i \vec{V}_i \\ \vec{M}_{eq}(O) = \sum_i \vec{OA}_i \wedge \vec{V}_i = \vec{0} \end{cases}$$



## Torseur équivalent à un ensemble de glisseurs parallèles

Le torseur équivalent à un ensemble de glisseurs parallèles est un glisseur dont le support passe par le barycentre des points pondérés par la norme des vecteurs glissants :

$$\{T_{eq}\} = \sum_i \{T_i\} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_{eq} = \sum_i \vec{V}_i \\ \vec{M}_{eq}(G) = \sum_i \vec{GA}_i \wedge \vec{V}_i = \sum_i \vec{GA}_i \wedge \lambda_i \vec{u} \end{cases}$$



### ◆ Remarque

$$\vec{M}_{eq}(G) = \sum_i \vec{GA}_i \wedge \lambda_i \vec{u} = \vec{0} \text{ si } \sum_i \lambda_i \vec{GA}_i = \vec{0} \text{ car } \lambda_i \neq 0 \text{ et } \vec{u} \neq \vec{0}.$$

## 2.5. Exercice : Calculer torseur équivalent (ex. barrage droit)

Soit un barrage d'envergure  $L$  dont la surface en contact avec le fluide à un profil linéaire vertical.



Les points  $M(y, z(y))$  de la surface du barrage sont définis dans le plan  $(y, z)$  par la relation :  $z(y) = 0$ .

La pression du fluide  $p(z) = \rho g z$  exerce sur une surface élémentaire  $dS = L \cdot dl$  un effort élémentaire  $\vec{dF} = p(z) dS \vec{n}_M$  avec  $\vec{n}_M$  la normale à la surface au point  $M$ ,  $z$  la distance du point  $M$  à la surface de l'eau et  $\rho$  la masse volumique du fluide.

$$\text{Donc } \vec{dF} = -\rho g z L dz \vec{y}$$

## Question 1

---

Déterminer l'action résultant de la pression exercée par le fluide sur le barrage.

## Question 2

---

Déterminer les coordonnées du centre de poussée.

# 3. Modélisation des liaisons mécaniques (normalisée)

## 3.1. Liaisons parfaites

### Définition

Une liaison restreint le mouvement d'un solide par rapport à un autre. Elle transmet donc une action mécanique entre les deux solides suivant la mobilité bloquée.

Les liaisons ont été classées et normalisées : à chacune de ces liaisons est associée un torseur d'action transmissible et un torseur cinématique qui ont une forme définie en un point et dans un repère privilégié.

Ces liaisons sont une représentation idéalisée de la réalité : les frottements et les jeux présents dans les liaisons réelles sont négligés.

## 3.2. Ponctuelle ou sphère/plan

On dit que deux solides sont en liaison ponctuelle lorsque la surface de contact entre ces solides est suffisamment petite pour être assimilée à un point.

Une liaison ponctuelle ne transmet qu'une action mécanique (ou qu'un mouvement) suivant la direction de la normale au contact. Il n'y a donc pas de déplacement relatif entre les 2 solides dans cette direction.

### Schéma et Torseur

Illustration d'une

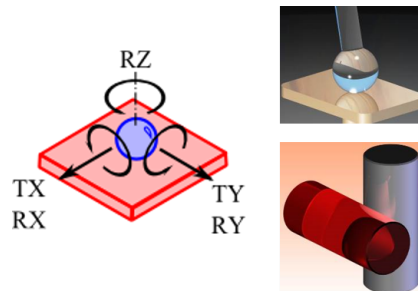
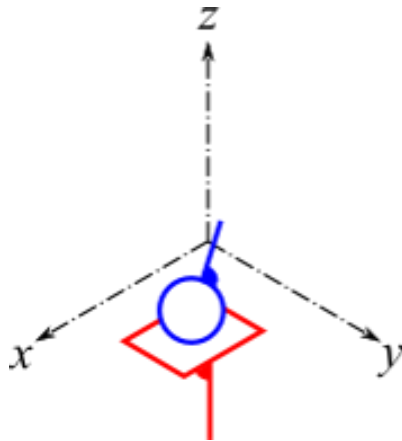


Illustration d'une liaison ponctuelle

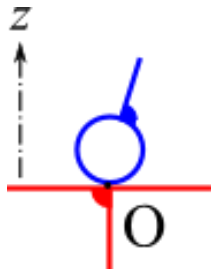
## Torseur des actions transmissibles au point de contact dans le repère du plan



Liaison ponctuelle de normale ( $O \vec{z}$ ).

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

## Torseur cinématique au point de contact dans le repère du plan



Liaison ponctuelle de normale ( $O \vec{z}$ ).

$$\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x(O) \\ \omega_y & V_y(O) \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

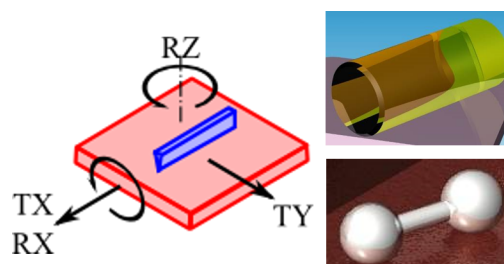
## 3.3. Linéaire rectiligne ou cylindre/plan

Deux solides sont en liaison linéaire rectiligne lorsque la zone de contact entre ces solides est assimilable à un segment de droite.

Une liaison linéaire rectiligne transmet un effort (ou une translation) suivant la direction de la normale au contact et un moment (ou rotation) autour de l'axe perpendiculaire à la ligne de contact et tangent à la surface.

### Illustration d'une liaison linéaire rectiligne

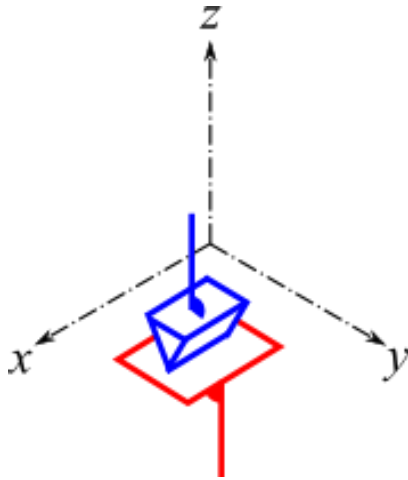
D'axe ( $O \vec{x}$ ).



### 3.3.1. Schéma et torseurs associés à une liaison linéaire rectiligne

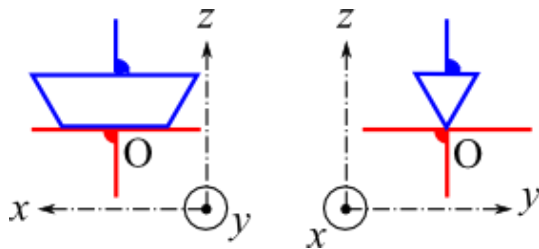
D'axe  $(O \vec{x})$ .

### Torseur des actions transmissibles au centre de la liaison



$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y(O) \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

### Torseur cinématique au centre de la liaison



$$\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x(O) \\ 0 & V_y(O) \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

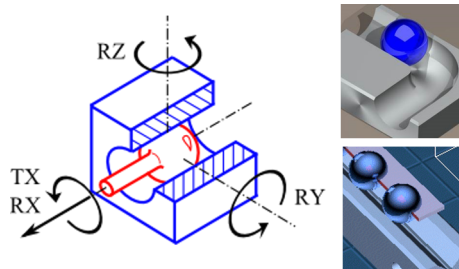
## 3.4. Linéaire annulaire ou sphère/cylindre ou sphère/prisme

Deux solides sont en liaison linéaire annulaire lorsque la zone de contact entre ces solides est constituée d'au moins 2 points de normales différentes.

Une liaison linéaire annulaire transmet un effort (ou une translation) dans le plan de la ligne de contact. Ce qui se traduit par projection sur un repère cartésien en deux composantes perpendiculaires.

### Illustration d'une liaison linéaire annulaire

D'axe  $(O \vec{x})$ .

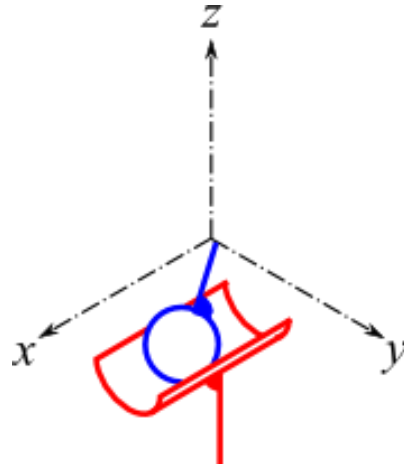




### 3.4.1. Schéma et torseurs associés à une liaison linéaire annulaire

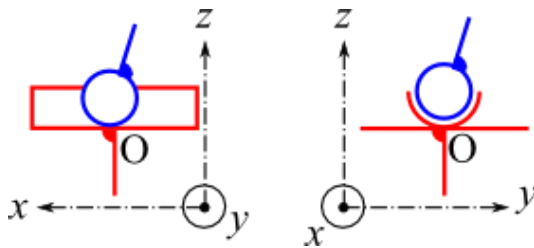
D'axe  $(O \vec{x})$ .

**Torseur des actions transmissibles au centre de la liaison**



$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

**Torseur cinématique au centre de la liaison**



$$\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x(O) \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

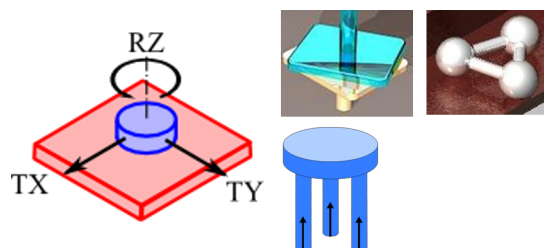
## 3.5. Appui plan ou plan/plan

Deux solides sont en liaison appui plan lorsque la zone de contact entre ces solides est assimilable à un plan (3 points de contact).

Une liaison appui plan transmet un effort (ou une translation) suivant la normale au plan de contact et les moments (ou les rotations) autour des axes contenus dans le plan.

**Illustration d'une liaison appui plan**

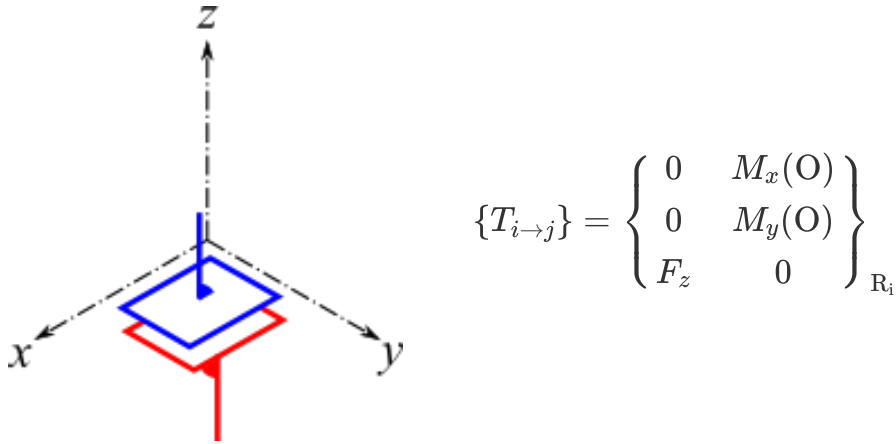
De normale  $(O \vec{z})$ .



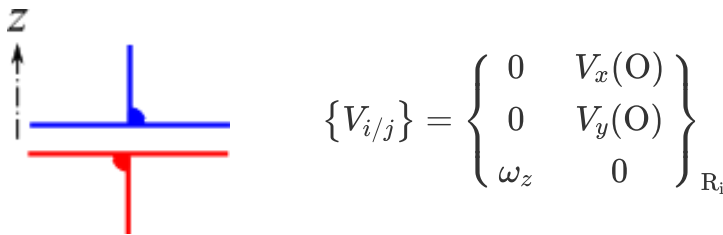
### 3.5.1. Schéma et torseurs associés à une liaison appui plan

De normale  $(O \vec{z})$ .

#### Torseur des actions transmissibles au centre de la liaison



#### Torseur cinématique au centre de la liaison



### 3.6. Rotule ou Sphérique

Deux solides en liaison rotule peuvent tourner l'un par rapport à l'autre autour du centre de la liaison.

Une liaison rotule peut transmettre un effort (ou une translation) suivant toutes les directions (soient 3 composantes en projection).

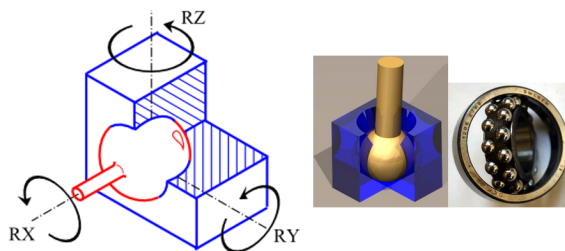
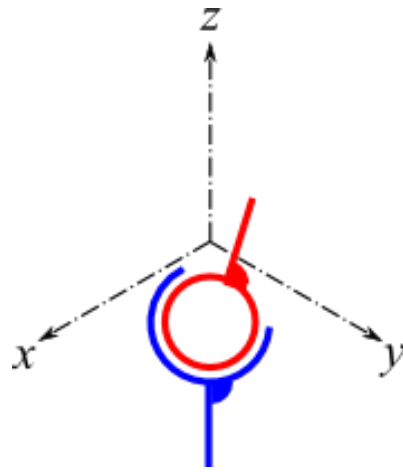


Illustration d'une liaison rotule de centre  $O$

### 3.6.1. Schéma et torseurs associés à une liaison rotule de centre O

#### Torseur des actions transmissibles au centre de la liaison



$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

#### Torseur cinématique au centre de la liaison



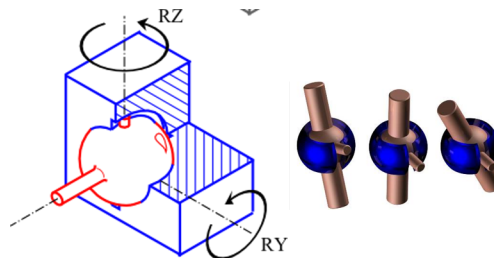
$$\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

## 3.7. Sphérique à doigt

Une liaison sphérique à doigt empêche les translations et une rotation entre les deux solides.

#### Illustration d'une liaison sphérique à doigt

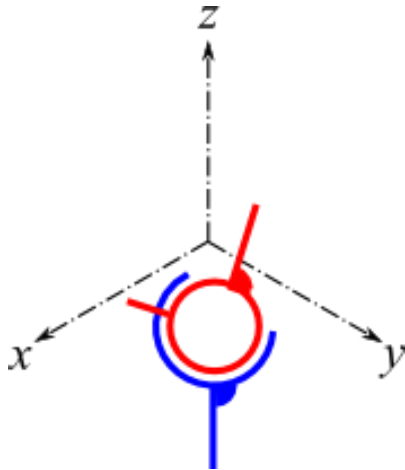
De centre O et de rotation  $(O \vec{x})$  bloquée.



### 3.7.1. Schéma et torseurs associés à une liaison sphérique à doigt

De centre O et de rotation  $(O \vec{x})$  bloquée.

### Torseur des actions transmissibles au centre de la liaison



$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} F_x & M_x(O) \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

### Torseur cinématique au centre de la liaison



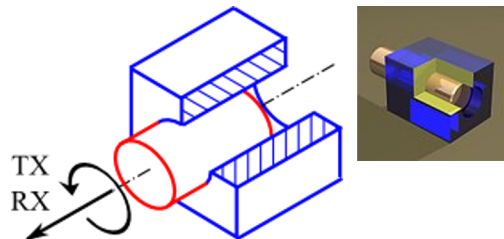
$$\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

## 3.8. Pivot-glissant ou Cylindrique

Une liaison pivot-glissant n'autorise qu'une translation et une rotation relative entre les 2 solides autour de l'axe de la liaison.

### Illustration d'une liaison pivot-glissant

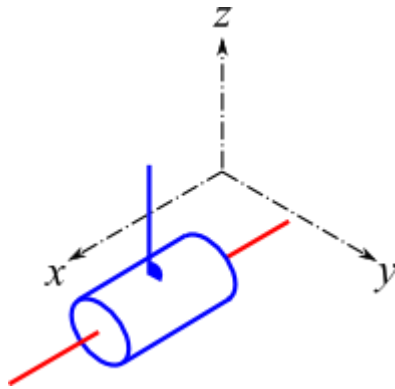
D'axe  $(O \vec{x})$ .



### 3.8.1. Schéma et torseurs associés à une liaison pivot-glissant

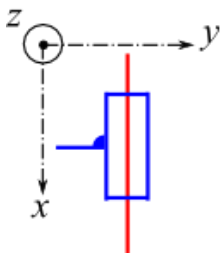
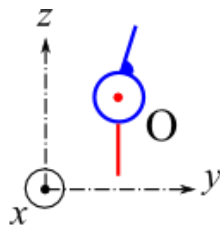
D'axe  $(O \vec{x})$ .

### Torseur des actions transmissibles au centre de la liaison



$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & M_y(O) \\ F_z & M_z(O) \end{Bmatrix}_{R_i}$$

### Torseur cinématique au centre de la liaison



$$\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x(O) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

## 3.9. Pivot ou Rotoïde

Une liaison pivot ne permet aux solides que de tourner l'un par rapport à l'autre autour d'un axe.

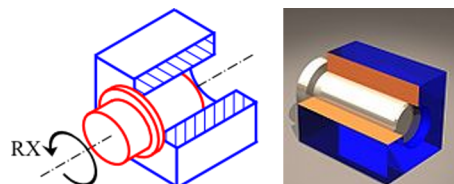
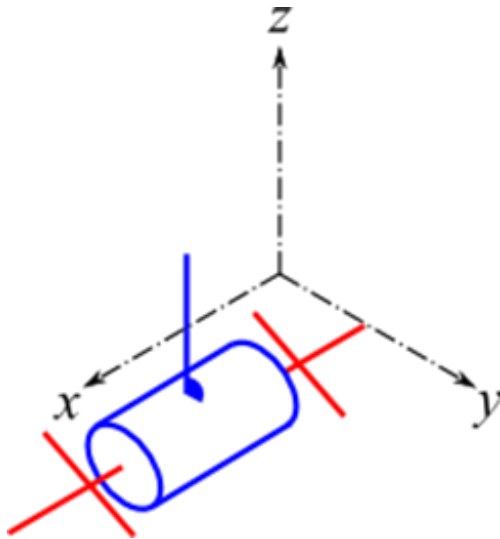


Illustration d'une liaison pivot

### 3.9.1. Schéma et torseurs associés à une liaison pivot

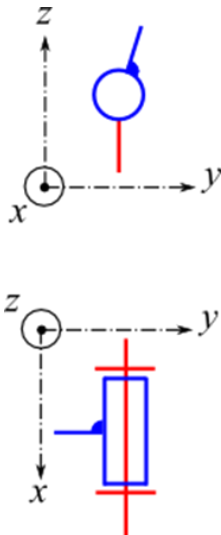
### Torseur des actions transmissibles au centre de la liaison



Pivot d'axe ( $O \vec{x}$ ).

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{cc} F_x & 0 \\ F_y & M_y(O) \\ F_z & M_z(O) \end{array} \right\}_{R_i}$$

### Torseur cinématique au centre de la liaison



Pivot d'axe ( $O \vec{x}$ ).

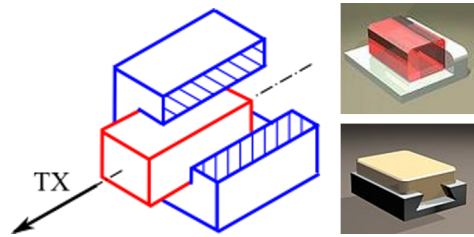
$$\{V_{i/j}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{R_i}$$

## 3.10. Glissière ou Prismatique

Une liaison glissière ne permet aux solides que de translater l'un par rapport à l'autre dans une direction.

## Illustration d'une liaison glissière

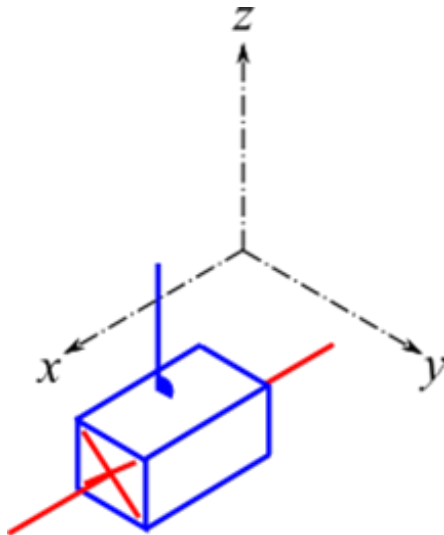
D'axe  $(O \vec{x})$ .



### 3.10.1. Schéma et torseurs associés à une liaison glissière

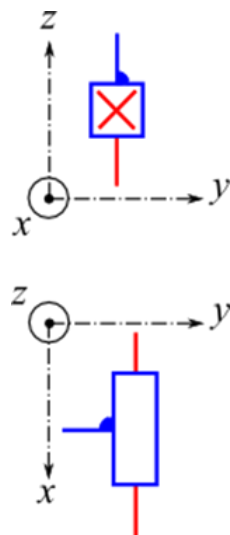
D'axe  $(O \vec{x})$ .

#### Torseur des actions transmissibles au centre de la liaison



$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_x(O) \\ F_y & M_y(O) \\ F_z & M_z(O) \end{Bmatrix}_{R_i}$$

#### Torseur cinématique au centre de la liaison



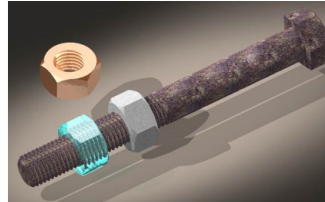
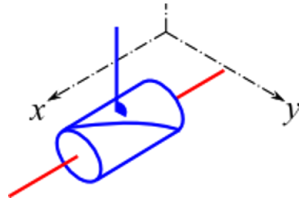
$$\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x(O) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

## 3.11. Hélicoïdale

Deux solides sont en liaison hélicoïdale lorsqu'ils ne peuvent que translater et tourner suivant un axe et que la translation et la rotation sont liées.

### Illustration d'une liaison hélicoïdale

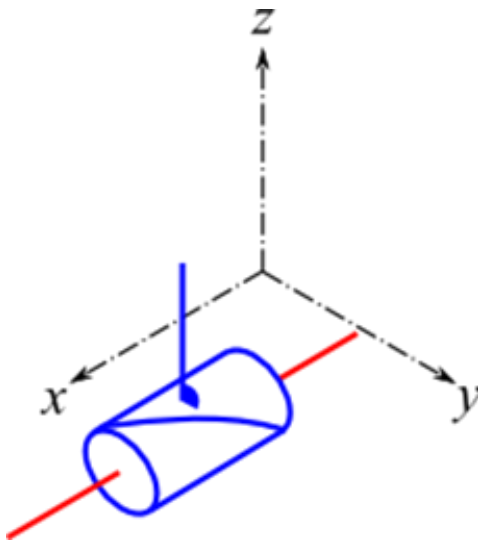
D'axe  $(O \vec{x})$ .



### 3.11.1. Schéma et torseurs associés à une liaison hélicoïdale

D'axe  $(O \vec{x})$ .

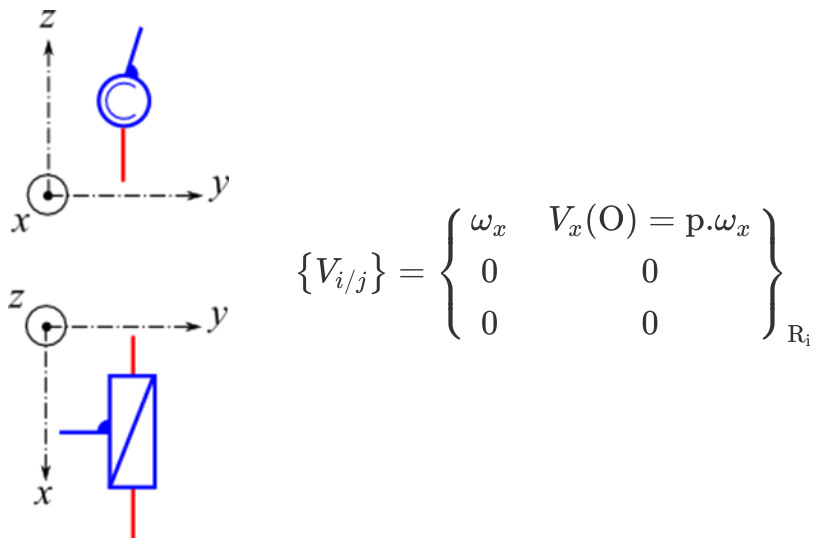
#### Torseur des actions transmissibles au centre de la liaison



$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & M_y(O) \\ F_z & M_z(O) \end{Bmatrix}_{R_i}$$



### Torseur cinématique au centre de la liaison



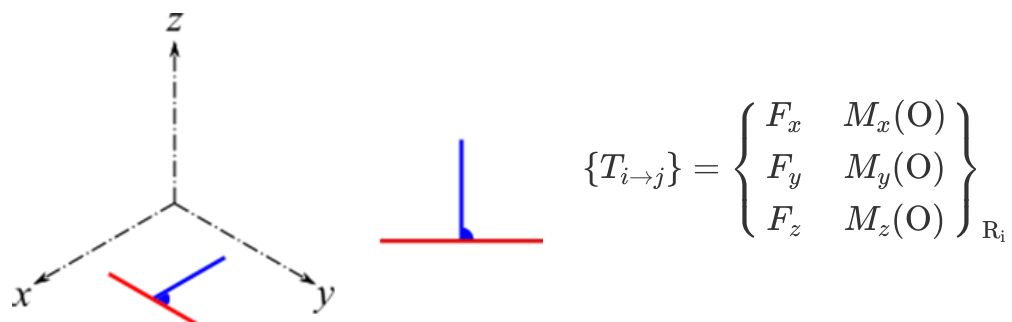
## 3.12. Encastrement ou Fixe

La liaison encastrement ne sert généralement qu'à représenter la liaison au bâti (solide considéré comme fixe par rapport au référentiel galiléen, généralement lié à la Terre) car deux solides liés par un encastrement ne forment en fait qu'un seul solide.



Illustration d'une liaison encastrement

### Torseur des actions transmissibles au centre de la liaison



### Torseur cinématique au centre de la liaison

$$\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_i}$$

# 4. PFS

## 4.1. Principe fondamental de la statique

Un solide S est en équilibre statique (sans mouvement) lorsque la somme des actions mécaniques (extérieures) s'exerçant sur lui, exprimées en même point, est nulle.

Autrement dit, quand le torseur équivalent à l'ensemble des actions mécaniques est nul :

$$\{T_{\text{ext} \rightarrow S}\}_P = \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{i \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{i \rightarrow S}(P)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=0}^n \overrightarrow{R_{i \rightarrow S}} \\ \sum_{i=0}^n \overrightarrow{M_{i \rightarrow S}(P)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

Il en résulte un système de 6 équations scalaires en projetant sur les axes du repère orthonormé direct :

$$\{T_{\text{ext} \rightarrow S}\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} Rx & 0 \\ Ry & 0 \\ 0 & Mz \end{array} \right\} = \{0\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \cdot \overrightarrow{x} = 0 \\ \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \cdot \overrightarrow{y} = 0 \\ \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \cdot \overrightarrow{z} = 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} \cdot \overrightarrow{x} = 0 \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} \cdot \overrightarrow{y} = 0 \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} \cdot \overrightarrow{z} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Si l'ensemble des forces (glisseurs) est contenu dans un plan, par exemple  $(P, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ , on ne dispose alors plus que de 3 équations (2 pour la résultante dans le plan et 1 pour le moment autour de l'axe perpendiculaire au plan) :

$$\{T_{\text{ext} \rightarrow S}\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} Rx & 0 \\ Ry & 0 \\ 0 & Mz \end{array} \right\} = \{0\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \cdot \overrightarrow{x} = 0 \\ \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \cdot \overrightarrow{y} = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} \cdot \overrightarrow{z} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

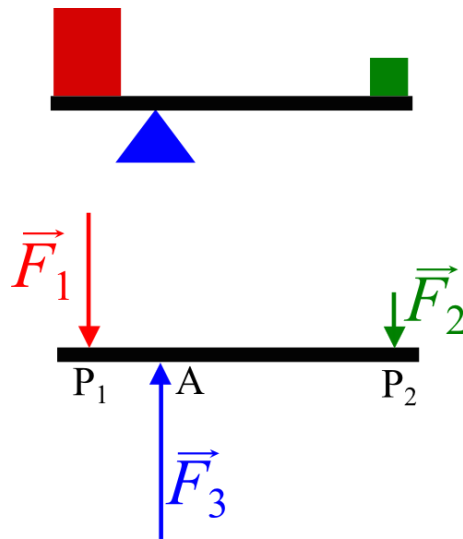
## 4.2. Application PFS

Pour déterminer analytiquement l'équilibre statique d'un solide, il faut d'abord vérifier que l'on dispose d'autant d'équations que d'inconnues. Pour cela, on isole le solide et on fait le bilan des actions mécaniques qui s'appliquent sur lui (actions de liaison, pesanteur, pression, ...). Chaque action mécanique peut introduire jusqu'à 6 inconnues pour les systèmes spatiaux (voir forme des torseurs d'action des liaisons normalisées) et jusqu'à 3 inconnues pour les modèles plans.

Pour un solide, on dispose de 6 équations (3 pour les modèles plans) pour déterminer ces inconnues. Si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations alors on peut déterminer l'ensemble des inconnues.

Si le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, le système est dit hyperstatique. Il faut alors trouver des équations supplémentaires pour résoudre comme des lois de comportement de déformations. Ce cas ne sera pas abordé dans le cadre du cours.

Pour un système à  $n$  solides, on ne peut isoler qu'un nombre de systèmes égal au nombre  $n$  de solides (pour obtenir des équations indépendantes). Chaque système (ou solide) fournit 6 équations (3 en plan), on a donc  $6*n$  équations (ou  $3*n$  en plan) pour déterminer autant d'inconnues.



Soit un solide soumis à trois actions définies par les torseurs suivants :

$$\{T_{1 \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{P_1} \quad \{T_{2 \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{P_2} \quad \{T_{3 \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Le torseur équivalent à ces actions est :

$$\{T_{1+2+3 \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ \overrightarrow{AP_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{AP_2} \wedge \vec{F}_2 \end{Bmatrix}_A$$

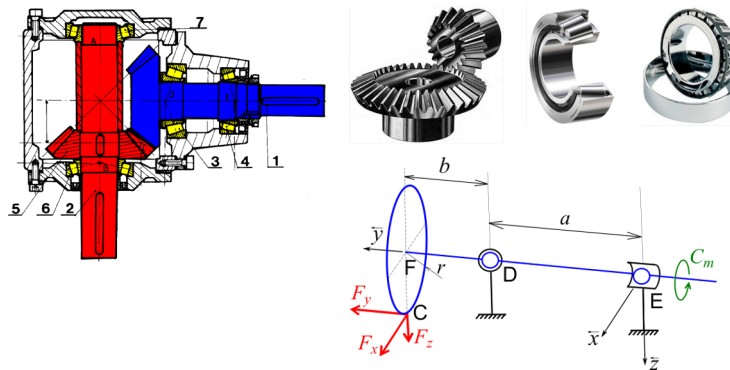
Le solide est en équilibre statique si

$$\{T_{1+2+3 \rightarrow S}\} = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \\ \overrightarrow{AP_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{AP_2} \wedge \vec{F}_2 = \vec{0} \end{cases}$$

# 5. Exercices de statique

## 5.1. Exercice : Renvoi d'angle

Le renvoi d'angle ci-dessous est composé de deux arbres portants des engrenages coniques. La modélisation de l'arbre moteur est donnée par le schéma ci-dessous.



Le torseur des actions de contact de 5/1 au point C est donné et a la forme suivante :

$$\{T_{5 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_C$$

Le moteur entraînant l'arbre 1 tourne à vitesse constante. Il exerce un couple sur l'arbre 1 par l'intermédiaire d'un accouplement élastique :

$$\{T_{m \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_m \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_E$$

### Question 1

Donner l'expression du torseur des actions de contact 5/1 au point F.

### Indice :

Voir cours torseur (cf. p.7).

### Question 2

Donner la forme du torseur des actions mécaniques exercées par le carter sur l'arbre 1 en D et en E.



## Question 5

---

Déterminer la hauteur d'eau  $H$ , à partir de laquelle la porte bascule.