

MÉTHODES POUR LA MÉCANIQUE DES SYSTÈMES

Date : 19 décembre 2022

Licence :

auteur·e(s) : Sébastien Morterolle, INSA de Lyon

Table des matières

1. Déterminer le torseur d'une action mécanique	3
2. Appliquer le PFS	4
3. Paramétrer le mouvement d'un système mécanique.....	6
4. Equations liaisons, joint, RSG.....	7
4.1. Equations de joint	7
4.1.1. Equation de bielle	7
4.1.2. Exercice : Joint de Cardan	7
4.2. Relation de non glissement	8
5. Calculer une vitesse.....	10
6. Calculer une accélération.....	11
7. Torseur cinétique.....	12
7.1. Calculer la résultante cinétique	12
7.2. Calculer le moment cinétique	12
8. Torseur dynamique.....	13
8.1. Calculer la résultante dynamique d'un solide par rapport à un référentiel galiléen	13
8.2. Calcul du moment dynamique d'un solide par rapport à un référentiel galiléen	13
9. Déterminer le tenseur d'inertie d'un solide	14
10. Appliquer le PFD.....	15
11. Appliquer le PFD – Utilisation de la méthode du système minimum.....	17
12. Calculer la puissance développée par une action mécanique.....	21
13. Calcul de l'énergie cinétique	22
14. Appliquer le TEC.....	23
Contenus annexes	24

1. Déterminer le torseur d'une action mécanique

2. Appliquer le PFS

Méthode 1. Bilan des inconnues

On isole un solide ou un ensemble de solides. On fait le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) qui s'exercent sur cet isolement (actions de liaison, pesanteur, pression, ...). Chaque action mécanique peut introduire jusqu'à 6 inconnues pour les systèmes spatiaux (voir forme des torseurs d'action des liaisons normalisées) et jusqu'à 3 inconnues pour les modèles plans.

Méthode 2. Bilan des équations

Pour un solide, le Principe Fondamentale de la Statique (PFS) permet d'écrire 6 équations (3 pour les modèles plans). Le nombre d'équations à disposition est donc égal au nombre de solides multiplié par 6 pour les modèles tridimensionnels (ou par 3 pour les modèle plans).

Remarque

L'isolement d'un ensemble de solides n'apporte pas d'équations supplémentaires mais peut remplacer l'isolement d'un solide.

Méthode 3. Résolubilité du problème

Si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations alors on peut théoriquement déterminer l'ensemble des inconnues.

Remarque

Si le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, le système est dit hyperstatique. Il faut alors trouver des équations supplémentaires pour résoudre comme des lois de comportement de déformations. Ce cas ne sera pas abordé dans le cadre du cours.

Méthode 4. Mise en équations

On calcule le torseur équivalent à l'ensemble des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide ou l'ensemble isolé : la résultante est la somme des résultantes, le moment résultant est la somme des moments de chaque action. Les moments doivent tous être calculés au même point en utilisant la relation de champ de moments.

$$\{T_{\text{ext} \rightarrow S}\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} = \sum_{i=0}^n \overrightarrow{R_{i \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} = \sum_{i=0}^n \overrightarrow{M_{i \rightarrow S}(P)} \end{array} \right\} \quad \text{et}$$

$$\overrightarrow{M_{i \rightarrow S}(P)} = \overrightarrow{M_{i \rightarrow S}(O)} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{R_{i \rightarrow S}}$$

Par application du principe fondamental de la statique, ce torseur doit être nul : il en résulte un système de 6 équations scalaires en projetant sur les axes du repère orthonormé direct :

$$\{T_{\text{ext} \rightarrow S}\}_P = \{0\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \cdot \vec{x} = 0 \\ \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \cdot \vec{y} = 0 \\ \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \cdot \vec{z} = 0 \end{cases} \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} \cdot \vec{x} = 0 \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} \cdot \vec{y} = 0 \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} \cdot \vec{z} = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Si l'ensemble des forces (glisseurs) est contenu dans un plan, par exemple (P, \vec{x}, \vec{y}) , on ne dispose alors plus que de 3 équations (2 pour la résultante dans le plan et 1 pour le moment autour de l'axe perpendiculaire au plan) :

$$\{T_{\text{ext} \rightarrow S}\}_P = \begin{pmatrix} Rx & 0 \\ Ry & 0 \\ 0 & Mz \end{pmatrix} = \{0\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \cdot \vec{x} = 0 \\ \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \cdot \vec{y} = 0 \end{cases} \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} \cdot \vec{z} = 0 \end{array} \right.$$

3. Paramétrer le mouvement d'un système mécanique

4. Equations liaisons, joint, RSG

4.1. Equations de joint

4.1.1. Equation de bielle

Une bielle est une pièce de transmission mécanique qui impose une distance constante entre ces deux solides avec lesquels elle est en liaison pivot ou rotule.

Si O_i et O_j sont les centres de ces liaisons alors l'équation de joint traduisant la présence de la

bielle est : $L = \left\| \overrightarrow{O_i O_j} \right\| = cste$



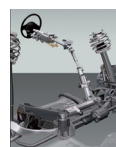
4.1.2. Exercice : Joint de Cardan

Le joint de Cardan permet la transmission d'une rotation angulaire entre deux arbres dont les axes géométriques concourent en un même point.

Cette technique est utilisée sur les véhicules pour accoupler deux arbres tournants non alignés ou dont les positions angulaires de l'un par rapport à l'autre peuvent varier ; par exemple l'axe du volant et le boîtier de direction, surtout dans le cas d'un volant réglable en hauteur par rapport au conducteur.



L'invention de ce joint en 1545 est attribuée au mathématicien italien Girolamo Cardano (Jérôme Cardan en français). Ce célèbre savant italien se serait inspiré d'un compas de marine fixé sur deux cercles articulés. Il a décrit l'articulation portant son nom dans un traité de physique intitulé « De subtilitate rerum ».



Le joint de Cardan est constitué :

- d'un arbre d'entrée (1) en liaison pivot avec le bâti (0) paramétrée $\psi_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$
- d'un arbre de sortie (2) en liaison pivot avec le bâti (0) paramétré $\psi_2 = (\vec{y}_0^*, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0^*, \vec{z}_2)$
- d'un croisillon (3) en liaison pivot avec l'arbre d'entrée (1) et avec arbre de sortie (2) ; les axes de ces 2 liaisons pivot sont perpendiculaires. Ces liaisons pivot ne sont pas paramétrées.

L'arbre de sortie (2) est désaxé de l'arbre d'entrée (1) d'un angle $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_0^*) = cste.$

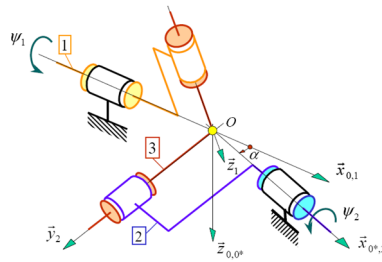


Schéma cinématique



Question 1

Écrire la (ou les) équation(s) de joint imposée(s) par le croisillon (3).

Question 2

En déduire le degré de mobilité du mécanisme.

Question 3

Calculer le rapport des vitesses $\frac{\dot{\psi}_2}{\dot{\psi}_1}$, le joint de Cardan est-il homocinétique ?

4.2. Relation de non glissement

Lorsqu'il n'y a pas de glissement, la vitesse de glissement est nulle : $\overrightarrow{V(I, j/i)} = \vec{0}$

Le contact ponctuel de normale \vec{n}_I impose $\overrightarrow{V(I, j/i)} \cdot \vec{n}_I = 0$ (dérivée par rapport au temps de l'équation de liaison).

Le fait qu'il n'y a pas de glissement impose que la composante tangentielle (dans le plan perpendiculaire à la normale) de la vitesse est nulle : $\overline{V(I,j/i)} - \left(\overline{V(I,j/i)} \cdot \vec{n}_I \right) \vec{n}_I = \vec{0}$

5. Calculer une vitesse

6. Calculer une accélération

7. Torseur cinétique

7.1. Calculer la résultante cinétique

La résultante cinétique, ou quantité de mouvement, d'un solide est égale au produit de sa masse m par la vitesse de son centre d'inertie G par rapport au référentiel galiléen R_g :

$$\overrightarrow{p}(S/g) = m \overrightarrow{V}(G/g)$$

7.2. Calculer le moment cinétique

De manière générale, le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}(A, S/g)$ d'un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_g peut se calculer avec l'expression suivante :

$$\overrightarrow{\sigma}(A, S/g) = m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}(A, S/g) + \overline{I}_{A,S} \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$$

Cependant, on choisit pour simplifier les calculs le point de sorte à se placer dans un des 2 cas suivants où il suffit de faire le produit du tenseur d'inertie avec le vecteur vitesse de rotation :

- Si le point A est fixe dans le mouvement S/R_g , $\overrightarrow{V}(A, S/g) = \overrightarrow{0}$, alors :

$$\overrightarrow{\sigma}(A, S/g) = \overline{I}_{A,S} \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$$

- Si le point A est le centre d'inertie G alors : $\overrightarrow{\sigma}(G, S/g) = \overline{I}_{G,S} \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$

La relation de champ de moments est ensuite utilisée pour l'obtenir en un autre point :

$$\overrightarrow{\sigma}(B, S/g) = \overrightarrow{\sigma}(A, S/g) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p}(S/g)$$

8. Torseur dynamique

8.1. Calculer la résultante dynamique d'un solide par rapport à un référentiel galiléen

La résultante dynamique, ou quantité d'accélération, d'un solide S par rapport au référentiel galiléen R_g est égale au produit de la masse m du solide par l'accélération de son centre d'inertie G par rapport à R_g :

$$\overrightarrow{D(S/g)} = m \overrightarrow{A(G/g)}$$

8.2. Calcul du moment dynamique d'un solide par rapport à un référentiel galiléen

De manière générale, on peut calculer le moment dynamique $\overrightarrow{\delta(A, S/g)}$ d'un solide S , dans son mouvement par rapport au repère R_g , en un point A lié au solide, à partir du moment cinétique avec la relation suivante :

$$\overrightarrow{\delta(A, S/g)} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\sigma(A, S/g)} \right)_g + \overrightarrow{V(A/g)} \wedge m \overrightarrow{V(G/g)}$$

Cependant pour simplifier les calculs, on choisira un point de sorte à être dans un des 2 cas suivants :

- Si le point A est fixe dans le repère R_g , $\overrightarrow{V(A/g)} = \vec{0}$, alors
$$\overrightarrow{\delta(A, S/g)} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{I_{A,S} \Omega_{S/g}} \right)_g$$
- Si le point A est le centre d'inertie G alors
$$\overrightarrow{\delta(G, S/g)} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{I_{G,S} \Omega_{S/g}} \right)_g$$

Si on souhaite calculer le moment en un autre point alors on utilise la relation de champ de moments :

$$\overrightarrow{\delta(B, S/g)} = \overrightarrow{\delta(A, S/g)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{D(S/g)} \text{ avec } \overrightarrow{D(S/g)} = m \overrightarrow{A(G/g)}$$

9. Déterminer le tenseur d'inertie d'un solide

De manière générale, le tenseur d'inertie est considéré connu :

- soit à partir d'un formulaire pour les volumes simples
- soit par mesures expérimentales
- soit calculer à l'aide d'un logiciel de CAO

Si ce n'est pas le cas alors on utilise les symétries pour simplifier. En effet, si le solide admet un plan de symétrie passant par le point où est exprimé le tenseur alors les produits d'inertie associés à la direction normale au plan sont nuls.

Exemple : si le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , de normale \vec{z} , est plan de symétrie du solide S alors le tenseur d'inertie de S en O exprimé dans la base $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est de la forme :

$$\overline{\overline{I_{O,S}}} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_R$$

On calcule ensuite le terme restant à partir de leur définition sous forme intégrale.

Opérateur d'inertie (cf. p.24)

Si besoin on peut exprimer le tenseur dans un autre repère

Changement de repère de la matrice d'inertie (cf. p.25)

Si besoin on peut exprimer le tenseur en un autre point

Transport du tenseur d'inertie (cf. p.26)

10. Appliquer le PFD

Méthode 1. Bilan des inconnues

On isole un solide ou un ensemble de solides. On fait le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) qui s'exercent sur cet isolement (actions de liaison, pesanteur, pression, ...). Chaque action mécanique peut introduire jusqu'à 6 inconnues pour les systèmes spatiaux (voir forme des torseurs d'action des liaisons normalisées) et jusqu'à 3 inconnues pour les modèles plans.

Méthode 2. Bilan des équations

Pour un solide, le Principe Fondamentale de la Dynamique (PFD) permet d'écrire 6 équations (3 pour les modèles plans). Le nombre d'équations à disposition est donc égal au nombre de solides multiplié par 6 pour les modèles tridimensionnels (ou par 3 pour les modèle plans).

Remarque

L'isolement d'un ensemble de solides n'apporte pas d'équations supplémentaires mais peut remplacer l'isolement d'un solide.

Méthode 3. Résolubilité du problème

Si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations alors on peut théoriquement déterminer l'ensemble des inconnues.

Remarque

Si le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, le système est dit hyperstatique. Il faut alors trouver des équations supplémentaires pour résoudre comme des lois de comportement de déformations. Ce cas ne sera pas abordé dans le cadre du cours.

Méthode 4. Mise en équations pour chaque isolement

On calcule le torseur équivalent à l'ensemble des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide ou l'ensemble isolé : la résultante est la somme des résultantes, le moment résultant est la somme des moments de chaque action. Les moments doivent tous être calculés au même point en utilisant la relation de champ de moments.

$$\{T_{\text{ext} \rightarrow S}\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} = \sum_{i=0}^n \overrightarrow{R_{i \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(P)} = \sum_{i=0}^n \overrightarrow{M_{i \rightarrow S}(P)} \end{array} \right\} \quad \text{et}$$

$$\overrightarrow{M_{i \rightarrow S}(P)} = \overrightarrow{M_{i \rightarrow S}(O)} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{R_{i \rightarrow S}}$$

On calcule le torseur dynamique du solide ou de l'ensemble considéré.

Calculer la résultante dynamique d'un solide par rapport à un référentiel galiléen (cf. p.13)

Calcul du moment dynamique d'un solide par rapport à un référentiel galiléen (cf. p.13)

Pour un ensemble de solides, on rappelle que pour sommer les torseurs leur moment doivent être exprimés au même point.

Enfin on écrit que le torseur équivalent à l'ensemble des actions mécaniques extérieures est égal au torseur dynamique du solide ou de l'ensemble considéré :

$$\{T_{\text{ext} \rightarrow S}\} = \{D_{S/g}\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}(A)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{D(S/g)} \\ \delta(A, S/g) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \overrightarrow{F_{i \rightarrow S}} = \int_S \overrightarrow{A(P/g)} dm \\ \sum_i \overrightarrow{M_{i \rightarrow S}(A)} = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{A(P/g)} \end{array} \right\}$$

Si le problème est un plan, par exemple (P, \vec{x}, \vec{y}) , on ne dispose alors plus que de 3 équations (2 pour la résultante dans le plan et 1 pour le moment autour de l'axe perpendiculaire au plan) :

Appliquer le PFD - Utilisation de la méthode du

11. système minimum

En fonction de l'objectif visé (connaître le mouvement ou déterminer une action de liaison), il n'est pas nécessaire d'écrire l'ensemble des équations. Si on s'intéresse seulement aux équations de mouvement (système d'équations différentielles permettant après résolution de connaître l'évolution de paramètres cinématiques au cours du temps à partir de conditions initiales) alors on cherchera à ne pas faire apparaître les actions de liaisons inconnues dans les équations.

Le système minimum est constitué du minimum d'équations nécessaires à écrire pour atteindre l'objectif : déterminer les équations régissant le mouvement du mécanisme.

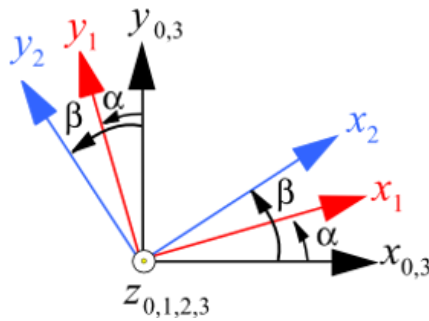
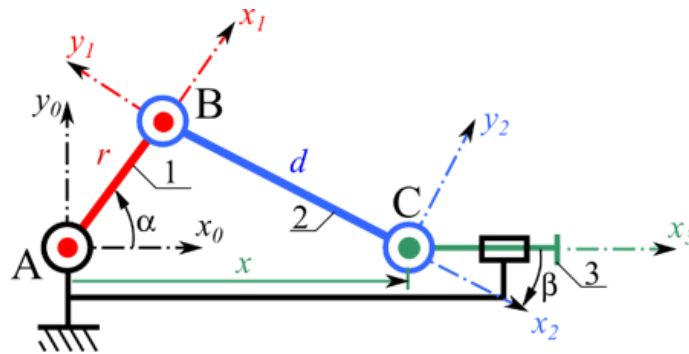
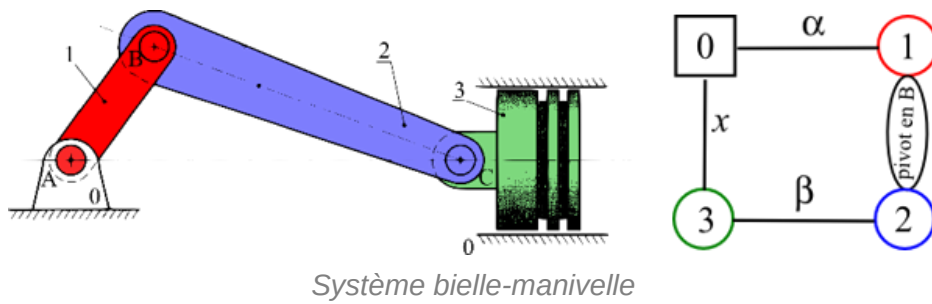
La méthode consiste à choisir les équations des théorèmes généraux ne faisant pas apparaître les actions de liaison. Pour cela, on se servira du graphe de liaison : le principe consiste à isoler successivement différents sous-ensembles du système en ne coupant qu'une liaison paramétrée à la fois. On isolera alors l'ensemble des solides situés après la liaison coupée, autrement dit en bout de chaîne cinématique (du côté où il n'y a pas le bâti). Parmi les 6 équations pouvant être écrites pour chaque isolement, on écrira seulement celles correspondant à une mobilité, ainsi aucune action de liaison n'interviendra dans l'équation.

Les seules actions de liaisons apparaissant dans les équations sont celles des liaisons non paramétrées. Ces actions seront déterminées grâce aux lois de comportement.

On dressera également un tableau bilan des équations et inconnues pour le système minimum :

	Inconnues		Equations	
Cinématique	<u>Paramètres cinématiques</u>	nb	<u>Equations de liaison</u> - géométriques (liaison) - cinématiques (roulement sans glissement)	nb
Dynamique	<u>Actions de liaison des liaisons non paramétrées</u>	nb	<u>Théorèmes généraux (PFD)</u> - théorème de la résultante dynamique pour chaque mobilité de translation dans la direction de la translation - théorème du moment dynamique pour chaque mobilité de rotation en un point de l'axe de la liaison et suivant la direction de l'axe de rotation <u>Lois de comportement</u> (contact frottant, résistance au roulement, dérive, ...)	nb

Exemple



Equations remplaçant la liaison pivot en C :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_{(1)}B_{(2)}} &= \vec{0} \\ &= \overrightarrow{B_{(1)}A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB_{(2)}} \\ &= -r\vec{x}_1 + x\vec{x}_0 - d\vec{x}_2 \\ \overrightarrow{B_{(1)}B_{(2)}} \cdot \vec{x}_0 &= x - r \cos \alpha - d \cos \beta = 0 \\ \overrightarrow{B_{(1)}B_{(2)}} \cdot \vec{y}_0 &= -r \sin \alpha - d \sin \beta = 0 \end{aligned}$$

	Inconnues	13	Equations	13
Cin.	x, α, β	3	Equations de liaison	2
	- pivot 0/1 : X_{01}, Y_{01} - pivot 1/2 : X_{12}, Y_{12} - pivot 2/3 : X_{23}, Y_{23} - glissière 3/0 : Y_{30}, MZ_{30} - effort sur piston : F - Couple résistant : Cr	2 2 2 2 1 1	Théorèmes généraux (PFD) - 3 solides * 3 équations Lois de comportement - effort sur piston considéré donné - vitesse de rotation constante $\dot{\alpha} = \omega = cte$	9 1 1

Bilan complet

	Inconnues	7	Equations	7
Cin.	x, α, β	3	<u>Equations de liaison</u>	2
Dynamique	- pivot 1/2 : X_{12}, Y_{12} - effort sur piston : F - Couple résistant : Cr	2	<u>Théorèmes généraux (PFD)</u>	
		1	- TMD appliqué à 1 en $A \vec{z}$	1
		1	- TMD appliqué à 2 en $C \vec{z}$	1
			- TRD appliqué à {2U3} sur $\overrightarrow{x_{0,3}}$	1
			<u>Lois de comportement</u>	
	- effort sur piston considéré donné	1		
	- $\dot{\alpha} = \omega = cte$	1		

Bilan du système minimum

Mise en équation

TRD appliqué à {2U3} sur $\overrightarrow{x_{0,3}}$

$$\overrightarrow{D_{3/0}} = m_3 \overrightarrow{\Gamma(G_3/0)} = m_3 \ddot{\overrightarrow{x_{0,3}}}$$

$$\overrightarrow{V(G_2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/0)} + \overrightarrow{G_2 C} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{x} \vec{x}_3 + d/2 \vec{x}_2 \wedge \dot{\beta} \vec{z} = \dot{x} \vec{x}_3 - \frac{d\dot{\beta}}{2} \vec{y}_2$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2/0)} = \left. \frac{dV(G_2/0)}{dt} \right|_0 = \ddot{x} \vec{x}_3 - \frac{d\ddot{\beta}}{2} \vec{y}_2 + \dot{\beta} \vec{z} \wedge -\frac{d\dot{\beta}}{2} \vec{y}_2 = \ddot{x} \vec{x}_3 - \frac{d\ddot{\beta}}{2} \vec{y}_2 + \frac{d\dot{\beta}^2}{2} \vec{x}_2$$

$$\overrightarrow{D_{2/0}} = m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2/0)} = m_2 \left(\ddot{x} \vec{x}_3 - \frac{d\ddot{\beta}}{2} \vec{y}_2 + \frac{d\dot{\beta}^2}{2} \vec{x}_2 \right)$$

$$\overrightarrow{\delta(A,1/0)} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\sigma(A,1/0)} \right)_0 = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{I_{A,1} \Omega_{1/0}} \right)_0 = C_1 \ddot{\alpha} \vec{z}$$

$$\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)} \right)_0 = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{I_{G_2,2} \Omega_{2/0}} \right)_0 = C_2 \ddot{\beta} \vec{z}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta(C,2/0)} &= \overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} + \overrightarrow{CG_2} \wedge m_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2/0)} \\ &= C_2 \ddot{\beta} \vec{z} - d/2 \vec{x}_2 \wedge m_2 \begin{pmatrix} \ddot{x} \cos \beta + d\dot{\beta}^2/2 \\ -\ddot{x} \sin \beta - d\ddot{\beta}/2 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \\ &= \left(C_2 \ddot{\beta} + m_2 \left(\ddot{x} \sin \beta d/2 + d^2 \dot{\beta}^2/4 \right) \right) \vec{z} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} = X_{12} \vec{x}_0 + Y_{12} \vec{y}_0$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{1 \rightarrow 2}(A)} &= \overrightarrow{M_{1 \rightarrow 2}(B)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ &= \vec{0} + \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_0 \wedge \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ 0 \end{pmatrix}_0 \\ &= (Y_{12} r \cos \alpha - X_{12} r \sin \alpha) \vec{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{1 \rightarrow 2}(C)} &= \overrightarrow{M_{1 \rightarrow 2}(B)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ &= \vec{0} + \begin{pmatrix} -d \cos \beta \\ -d \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}_0 \wedge \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ 0 \end{pmatrix}_0 \\ &= (-d \cos \beta Y_{12} + d \sin \beta X_{12}) \vec{z} \end{aligned}$$

Bilan

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BB} \cdot \vec{x}_0 = 0 \\ \overrightarrow{BB} \cdot \vec{y}_0 = 0 \\ \left(\overrightarrow{D_{2/0}} + \overrightarrow{D_{3/0}} \right) \cdot \vec{x}_0 = \left(\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{gaz \rightarrow 3}} \right) \cdot \vec{x}_0 \\ \delta(A, 1/0) \cdot \vec{z} = \left(\overrightarrow{M_{2 \rightarrow 1}(A)} + \overrightarrow{M_{r \rightarrow 1}(A)} \right) \cdot \vec{z} \\ \delta(C, 2/0) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{M_{1 \rightarrow 2}(C)} \cdot \vec{z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \alpha + d \cos \beta \\ -r \sin \alpha = d \sin \beta \\ (m_3 + m_2)\ddot{x} + m_2(\dot{\beta}^2 \cos \beta + \ddot{\beta} \sin \beta) d/2 = X \\ C_1 \ddot{\alpha} = C_r - (Y_{12} r \cos \alpha - X_{12} r \sin \alpha) \\ C_2 \ddot{\beta} + m_2(\ddot{x} \sin \beta d/2 + d^2 \ddot{\beta}/4) = -d \cos \beta Y_{12} \end{array} \right.$$

Calculer la puissance développée par une action

12. mécanique

Calcul de la puissance développée par les actions mécaniques s'exerçant sur un système mécanique

Pour calculer la puissance développée par une action mécanique, on fait le comoment du torseur de l'action par le torseur cinématique du mouvement du solide, sur lequel l'action s'applique, par rapport au référentiel galiléen :

$$P_{ext \rightarrow S/g} = \overrightarrow{R}_{ext \rightarrow S} \cdot \overrightarrow{V}(A, S/g) + \overrightarrow{M}_{ext \rightarrow S}(A) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/g}$$

Les 2 torseurs sont exprimés au même point ; en général celui où l'on connaît le torseur d'action.

Pour une action intérieure, c'est à dire entre de solides du système considéré, on fait le comoment du torseur de l'action du premier solide sur le second par le torseur cinématique du mouvement du second solide par rapport au premier :

$$P_{i \leftrightarrow j} = \overrightarrow{R}_{i \rightarrow j} \cdot \overrightarrow{V}(A, j/i) + \overrightarrow{M}_{i \rightarrow j}(A) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{j/i}$$

Remarque : si une liaison est parfaite alors elle ne développe pas de puissance.

Pour une action dérivant d'une fonction de force U ou d'un potentiel $V = -U$, on peut calculer la puissance dissipée en dérivant la fonction par rapport au temps :

$$P_{F \rightarrow S/g} = \frac{dU}{dt}$$

La fonction de force de pesanteur est $U_{pes} = -mgz + cte$ où z est altitude du centre de masse (position suivant la verticale ascendante).

La fonction de force d'un ressort linéaire est $U_r = -\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte$ où k est la raideur, l la longueur du ressort (fonction des paramètres cinématiques) et l_0 la longueur à vide du ressort.

13. Calcul de l'énergie cinétique

Calcul de l'énergie cinétique d'un système mécanique

Pour calculer l'énergie cinétique d'un système mécanique, on somme les énergies cinétiques de tous les solides composant le système. Ces énergies cinétiques sont généralement calculés à partir des quantités exprimées au centre de masse car plus simples :

$$T_{S/g} = \frac{1}{2} m \overrightarrow{V(G/g)}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \overrightarrow{I_{G,S}} \overrightarrow{\Omega_{S/g}}$$

S'il existe un point fixe dans le mouvement du solide par rapport au référentiel galiléen, on peut aussi utiliser les quantités exprimées en ce point :

$$T_{S/g} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \overrightarrow{I_{A,S}} \overrightarrow{\Omega_{S/g}}$$

14. Appliquer le TEC

Application du théorème de l'énergie cinétique

Pour appliquer le théorème de l'énergie cinétique, on calcule d'une part l'énergie cinétique du système considéré puis on la dérive par rapport au temps et d'autre part la somme des puissances développées par les actions mécaniques s'exerçant sur le système et à l'intérieur du système. Le théorème dit que ces 2 quantités sont égales, on obtient ainsi une relation entre le mouvement (paramètres cinématiques) et les actions mécaniques.

$$\frac{dT_{S/g}}{dt} = P_{ext \rightarrow S/g} + P_{int}$$

Contenus annexes

1. Opérateur d'inertie

Le produit vectoriel peut être vu comme une application linéaire :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_R \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = [U] \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$$

Le double produit vectoriel est donc :

$$\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \wedge \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} y(ay - bx) - z(cx - az) \\ z(bz - cy) - x(ay - bx) \\ x(cx - az) - y(bz - cy) \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$$

$$[V] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}_R \Rightarrow -[V]^2 = - \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_R$$

En prenant $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$ position d'un point matériel P appartenant au solide S par

rapport au point O et $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega_{S/g}}$, on définit le tenseur d'inertie $\overline{\overline{I_{O,S}}}$ en un point O comme étant l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{I_{O,S}}} &= \int_S -[V]^2 dm \\ &= \int_S \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_R dm \\ &= \begin{bmatrix} \int_S y^2 + z^2 dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S z^2 + x^2 dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S x^2 + y^2 dm \end{bmatrix}_R \end{aligned}$$

◆ Remarque

Le tenseur d'inertie $\overline{\overline{I_{O,S}}}$ dépend du point où il est défini et de la base dans laquelle il est exprimé.

Le tenseur d'inertie est généralement noté dans une base liée au solide $R_i(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\overline{\overline{I_{O,S}}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}_{R_i} \quad \text{ou suivant la notation de Binet :}$$

$$\overline{\overline{I_{O,S}}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_i}$$

$$A = I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm \geq 0 \quad -D = I_{yz} = I_{zy} = - \int_S yz dm$$

$$\text{Avec } B = I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2) dm \geq 0 \text{ et } -E = I_{xz} = I_{zx} = - \int_S xz dm$$

$$C = I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm \geq 0 \quad -F = I_{xy} = I_{yx} = - \int_S xy dm$$

A , B et C sont les moments d'inertie respectivement par rapport aux axes $(O\vec{x})$, $(O\vec{y})$ et $(O\vec{z})$.

D , E et F sont les produits d'inertie.

2.Changement de repère de la matrice d'inertie

Pour exprimer le tenseur d'inertie dans une base R_j à partir de son expression dans la base R_i , on utilisera les relations suivantes :

$$\overline{\overline{I_{G,S_{R_j}}}} = \begin{bmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{bmatrix}_{R_j} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A' &= \vec{x}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{x}_j \\ B' &= \vec{y}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{y}_j \\ C' &= \vec{z}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{z}_j \end{aligned} \quad \text{et}$$

$$-D' = \vec{z}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{y}_j = \vec{y}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{z}_j$$

$$-E' = \vec{z}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{x}_j = \vec{x}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{z}_j$$

$$-F' = \vec{x}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{y}_j = \vec{y}_j \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} \cdot \vec{x}_j$$

Les vecteurs $\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j$ de base de R_j exprimés dans R_i .

Cette méthode est avantageuse par rapport à la formule de changement de base de l'opérateur linéaire que représente le tenseur d'inertie : $\overline{\overline{I_{G,S_{R_j}}}} = [P_{ji}] \cdot \overline{\overline{I_{G,S_{R_i}}}} [P_{ji}]^t$ avec $[P_{ji}]$ la matrice de passage.

Elle décompose le calcul élément par élément et le rend plus succinct évitant tout produit matriciel.

3. Transport du tenseur d'inertie

On peut calculer le tenseur d'inertie d'un solide en tout point (fixe par rapport au solide) à partir du tenseur d'inertie au centre d'inertie en utilisant le **théorème de Koenig** : $\overline{\overline{I_{O,S}}} = \overline{\overline{I_{G,S}}} + \overline{\overline{I_{O,m}}}$

Le tenseur d'inertie au point O d'un solide est égal au tenseur d'inertie au centre d'inertie G du solide augmenté du tenseur d'inertie au point O de la masse totale du solide concentrée au centre d'inertie G.

Si le tenseur d'inertie au centre d'inertie G est $\overline{\overline{I_{G,S}}} = \begin{bmatrix} A^* & -F^* & -E^* \\ -F^* & B^* & -D^* \\ -E^* & -D^* & C^* \end{bmatrix}_R$

la masse du solide est m et la position du centre d'inertie G est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

Alors $\overline{\overline{I_{O,S}}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R$ avec $A = A^* + m(b^2 + c^2)$ $D = D^* + mbc$
 $B = B^* + m(c^2 + a^2)$ et $E = E^* + mca$
 $C = C^* + m(a^2 + b^2)$ $F = F^* + mab$

$$\overline{\overline{I_{O,S}}} = \overline{\overline{I_{G,S}}} + \overline{\overline{I_{O,m}}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} A^* & -F^* & -E^* \\ -F^* & B^* & -D^* \\ -E^* & -D^* & C^* \end{bmatrix}_R + m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab \\ -ab & c^2 + a^2 \\ -ca & -bc \end{bmatrix}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \overline{\overline{I_{O,S}}} \vec{\Omega} &= \int_S \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}) dm \\ &= \int_S (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}) \wedge (\vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP})) dm \\ &= \int_S \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) dm + \int_S \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GP}) dm + \int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) dm + \int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GP}) dm \\ &= \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) \int_S dm + \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \int_S \overrightarrow{GP} dm) + \int_S \overrightarrow{GP} dm \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) + \overline{\overline{I_{G,S}}} \vec{\Omega} \\ &= \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) m + \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{0}) + \vec{0} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) + \overline{\overline{I_{G,S}}} \vec{\Omega} \\ &= m \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) + \overline{\overline{I_{G,S}}} \vec{\Omega} \\ &= \overline{\overline{I_{O,m}}} \vec{\Omega} + \overline{\overline{I_{G,S}}} \vec{\Omega} \end{aligned}$$

Donc $\overline{\overline{I_{O,S}}} = \overline{\overline{I_{O,m}}} + \overline{\overline{I_{G,S}}}$

Remarque

Pour transporter le tenseur d'inertie d'un point à un autre, il faut obligatoirement passer par le centre d'inertie.

$$\overline{\overline{I_{A,S}}} \Rightarrow \overline{\overline{I_{G,S}}} = \overline{\overline{I_{A,S}}} - \overline{\overline{I_{A,m}}} \Rightarrow \overline{\overline{I_{B,S}}} = \overline{\overline{I_{G,S}}} + \overline{\overline{I_{B,m}}}$$

Ce théorème de Koenig contient le théorème de Huygens :

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à la droite $(O\vec{u})$ est égal au moment d'inertie du solide par rapport à la droite $(G\vec{u})$ augmenté du moment d'inertie de la masse du solide concentrée en G par rapport à la droite $(O\vec{u})$.

$$A = A^* + m(b^2 + c^2)$$

En particulier : $B = B^* + m(c^2 + a^2)$

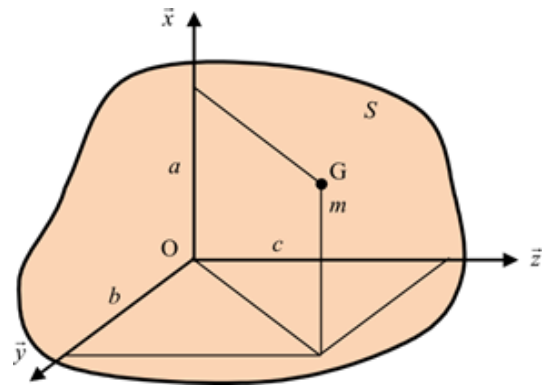
$$C = C^* + m(a^2 + b^2)$$

Le produit d'inertie d'un solide par rapport à 2 droites perpendiculaires $(O\vec{u})$ et $(O\vec{v})$ est égal au produit d'inertie du solide par rapport aux droites $(G\vec{u})$ et $(G\vec{v})$ augmenté du produit d'inertie de la masse du solide concentrée en G par rapport aux droites $(O\vec{u})$ et $(O\vec{v})$.

$$D = D^* + mbc$$

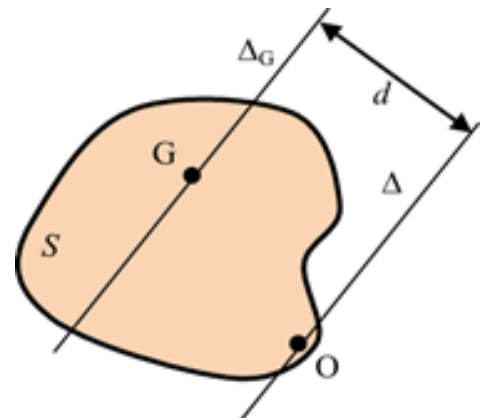
En particulier : $E = E^* + mca$

$$F = F^* + mab$$



Pour deux axes parallèles dont l'un passe par le centre d'inertie G, on a : $I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + md^2$

Parmi tous les axes parallèles, le moment d'inertie est minimum par rapport à l'axe passant par centre d'inertie.



Exemple Pendule simple

Le pendule est modélisé par une boule de rayon r .

$$\begin{aligned} I_{O\vec{y}} &= I_{G\vec{y}} + ml^2 \\ &= \frac{2}{5} mr^2 + ml^2 \end{aligned}$$

